Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 707 ($WT = 1{,}64$) i 708 ($WT = 1{,}71$) z numeru 10/2015

Paweł Najman	Kraków	46,20
Jerzy Cisło	Wrocław	42,48
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	40,34
Stanisław Bednarek	Łódź	38,85
Janusz Fiett	Warszawa	37,91
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77

Pan Najman: 44 p. po raz siódmy.

Zadania z matematyki nr 721, 722

Redaguje Marcin E. KUCZMA

721. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty D, E, F, w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Zadanie 722 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2016

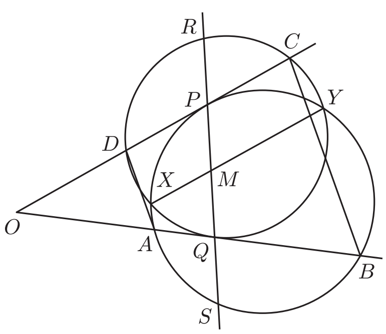
Przypominamy treść zadań:

713. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym boki AB i CD nie są równoległe. Rozważamy okrąg, przechodzący przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrąg, przechodzący przez punkty C i D, styczny do prostej AB w punkcie Q. Zakładamy, że punkty P i Q leżą na odcinkach CD i AB oraz że wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez środek odcinka PQ. Udowodnić, że proste AD i BC są równoległe.

714. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej $m \geqslant 1$.

(a) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb naturalnych m, n, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$.

(b) Czy istnieje para liczb naturalnych względnie pierwszych $m, n > 1$, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$?

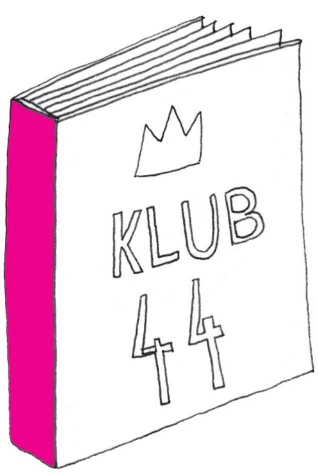


713. Przyjmijmy, że punkt O przecięcia prostych AB i CD leży na półprostych $CD^{\rightarrow}$ i $BA^{\rightarrow}$ oraz że prosta PQ przecina okręgi (ABP) i (CDQ) odpowiednio w punktach S i R (różnych od Q, P). Wspólna cięciwa tych okręgów – nazwijmy ją XY – przechodzi przez środek M odcinka PQ. Z równości $|MP| \cdot |MS| = |MX| \cdot |MY| = |MQ| \cdot |MR|$ oraz $|MP| = |MQ|$ wnosimy, że $|MR| = |MS|$, a stąd $|PR| = |QS|$.

Także $|PC| \cdot |PD| = |PQ| \cdot |PR|$ oraz $|QA| \cdot |QB| = |QP| \cdot |QS|$. Prawe strony tych równości są równe, więc lewe też. Oznaczając odległości punktów A, B, C, D, P, Q od punktu O kolejno literami a, b, c, d, p, q, przepisujemy uzyskaną zależność w postaci $(c-p)(p-d) = (q-a)(b-q)$. Po wymnożeniu i uwzględnieniu równości $p^2 = ab$, $q^2 = cd$, otrzymujemy związek $p(c+d) = q(a+b)$. Tak więc

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a+b}{p} = \frac{c+d}{q} = \sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Skoro $b > a$, $c > d$, wynika stąd, że $c/d = b/a$. To zaś oznacza, że proste AD i BC są równoległe.



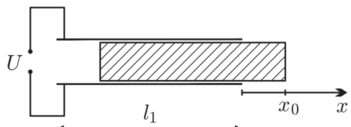
714. (a) Na przykład, każda para postaci $m = p$, $n = 2p$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą, ma wymaganą własność, bowiem $d(p) = 2$, $d(2p) = 4$.

(b) Przypuśćmy, że para liczb względnie pierwszych $m, n > 1$ spełnia podane równanie: $nd(m) = md(n)$. Skoro liczby m, n są względnie pierwsze, wynika stąd, że m jest dzielnikiem liczby $d(m)$. Wobec tego $m \leqslant d(m)$. Taka nierówność zajść może (w formie równości) tylko wtedy, gdy każda liczba ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$ jest dzielnikiem liczby m. W szczególności m musi dzielić się przez $m-1$. To zaś ma miejsce jedynie dla $m = 2$ (rozważamy, z założenia, tylko $m > 1$).

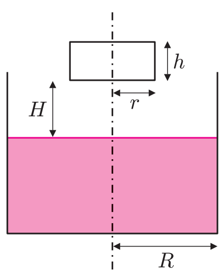
Role liczb m, n są symetryczne; to samo rozumowanie pokazuje, że także $n = 2$; sprzeczność z założeniem, że m, n są względnie pierwsze. Nie istnieje więc para, o jakiej mowa w pytaniu (b).

Klub 44

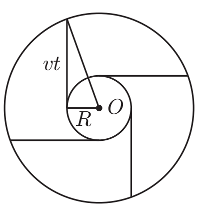
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2016



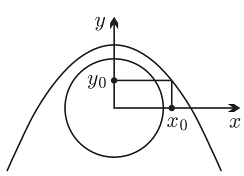
Rys. 1



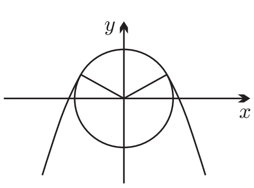
Rys. 2



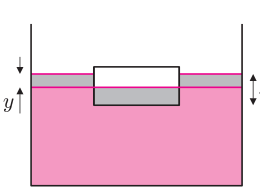
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania z fizyki nr 618, 619

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

618. Na kartce papieru narysowano w dziesięciokrotnym pomniejszeniu tor kamienia wyrzuconego z prędkością v pod kątem α do poziomu. Po narysowanej krzywej pełznie mały żuczek, którego prędkość ma stałą wartość u. Ile wynosi przyspieszenie żuczka w punkcie odpowiadającym maksymalnej wysokości, na jaką wzniósł się kamień. Oporu powietrza podczas ruchu kamienia nie uwzględniamy.

619. Całą przestrzeń między okładkami kondensatora płaskiego wypełnia płytka dielektryczna o masie m i stałej dielektrycznej ε (rys. 1). Okładki kondensatora mają rozmiary $l_1 \times l_2$, odległość między nimi wynosi d ($l_1 \gg d$, $l_2 \gg d$). Między okładkami utrzymywane jest stałe napięcie U. Płytkę wysunięto z obszaru kondensatora wzdłuż boku o długości l_1 na odległość x_0, a następnie puszczono swobodnie. Zaniedbując tarcie, znaleźć zależność przemieszczenia i prędkości płytki od czasu.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2016

Przypominamy treść zadań:

610. Mokre koło o promieniu R obraca się ruchem jednostajnym w płaszczyźnie pionowej wokół nieruchomej osi. Prędkość punktów na obwodzie koła wynosi v. Znaleźć granicę obszaru suchego.

611. Do naczynia w kształcie walca o promieniu R, częściowo wypełnionego cieczą, wpada klocek w kształcie walca o promieniu r i wysokości h (rys. 2). W chwili początkowej odległość dolnej powierzchni klocka od powierzchni cieczy wynosi H, a jego prędkość jest równa zeru. Ile ciepła wydzieli się do chwili, gdy ustanie ruch klocka i cieczy? Gęstość klocka wynosi ρ, gęstość cieczy $\rho_c > \rho$.

610. Gdyby nie było siły ciężkości, krople oderwane od obręczy koła poruszałyby się po liniach prostych i po czasie t znajdowały się na okręgu o środku w punkcie O (rys. 3) i promieniu $r(t)$, przy czym $r^2(t) = R^2 + v^2t^2$. W polu ciężkości środek okręgu obniża się i w czasie t przebywa drogę $\mathrm{g}t^2/2$. Granica obszaru suchego jest obwiednią okręgów, na których znajdują się w kolejnych momentach krople, które oderwały się jednocześnie od obręczy. Przyjmijmy, że początek układu współrzędnych znajduje się w środku obracającego się koła. Równanie „spadającego” okręgu ma w chwili t postać: $x^2 + (y + \mathrm{g}t^2/2) = r^2(t)$. Rozważmy prostą poziomą $y = y_0$ (rys. 4). Chcemy znaleźć maksymalną wartość współrzędnej x odpowiadającej jednemu z okręgów przecinających tę prostą: $x^2 = R^2 + v^2t^2 - (y_0 + \mathrm{g}t^2/2)^2$. Po prawej stronie równania mamy trójmian kwadratowy względem t^2. Jego wartość maksymalna x_0 spełnia równanie: $x_0^2 = R^2 + v^4/\mathrm{g}^2 - 2v^2y_0/\mathrm{g}$. Rozwiązując to równanie względem y_0, otrzymujemy równanie krzywej opisującej granicę „suchego” obszaru: $y_0 = -\mathrm{g}x_0^2/v^2 + \mathrm{g}R^2/(2v^2) + v^2/(2\mathrm{g})$. Jest to równanie paraboli, której gałęzie są skierowane w dół, a wierzchołek znajduje się na osi y na wysokości $Y = \mathrm{g}R^2/(2v^2) + v^2/(2\mathrm{g})$. Gdy $Y > R$, czyli spełniony jest warunek $v^2 > \mathrm{g}R$, poszukiwana krzywa leży na zewnątrz obręczy. W przeciwnym przypadku granica „mokrego” obszaru przebiega w górnej części po obręczy (rys. 5), a następnie gładko przechodzi w gałęzie paraboli.

611. Oznaczmy przez x głębokość zanurzenia klocka po ustaleniu się równowagi, a przez y wzrost poziomu cieczy w naczyniu (rys. 6). Zgodnie z prawem Archimedesa $x = h\rho/\rho_c$. Z rysunku widać, że zachodzi związek $\pi r^2(x - y) = \pi(R^2 - r^2)y$. Stąd $y = h\rho r^2/(\rho_c R^2)$. Wzrost poziomu cieczy możemy też wyliczyć, wiedząc, że parcie na dno zwiększyło się o ciężar klocka, a z drugiej strony ciśnienie na dno zwiększyło się o wartość $\rho_c \mathrm{g} y$. Zatem zachodzi związek $\pi r^2 h\rho \mathrm{g} = \pi R^2 \rho_c \mathrm{g} y$. Po ustaleniu się równowagi energia potencjalna klocka zmalała o wielkość $\Delta E_1 = \pi r^2 h\rho \mathrm{g}(H + x - y)$. Energia potencjalna cieczy wzrosła o

$$\Delta E_2 = \pi r^2(x - y)\rho_c \mathrm{g}(x - y/2 - (x - y)/2) = \pi r^2 \rho_c \mathrm{g}(x - y)x/2.$$

Wydzielone ciepło wynosi

$$Q = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho g h\left[H + \frac{h\rho}{2\rho_c}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$