Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

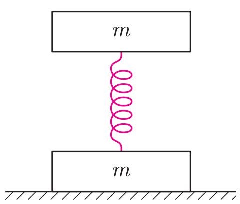
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2016

Zadania z fizyki nr 616, 617

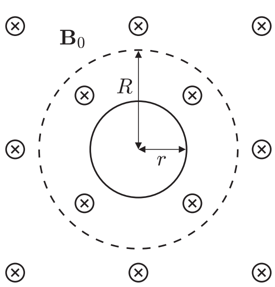
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

616. Układ złożony z dwóch jednakowych płytek o masach m połączonych nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k znajduje się w stanie równowagi (rys. 1). Górną płytkę naciśnięto tak, że opuściła się ona o x, a następnie puszczono. Na jaką maksymalną wysokość podniósł się środek masy układu?



Rys. 1

617. Na zewnątrz powierzchni walcowej o promieniu r wartość wektora indukcji pola magnetycznego rośnie liniowo w czasie: $B_0 = \alpha t$. Linie pola magnetycznego są równoległe do osi walca (rys. 2). Jak musi zmieniać się w czasie wartość jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz tej powierzchni, aby elektron poruszał się po okręgu o promieniu $R > r$? W chwili $t = 0$ elektron spoczywa.



Rys. 2

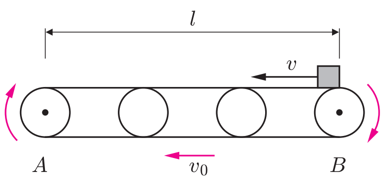
Rozwiązania zadań z numeru 12/2015

Przypominamy treść zadań:

608. Taśma transportera o długości l porusza się z prędkością v_0. Z jaką prędkością v względem Ziemi należy popchnąć mały klocek z końca transportera przeciwnie do ruchu taśmy, aby ilość ciepła wydzielona w wyniku tarcia klocka o taśmę była największa? Jaka jest wartość tego ciepła, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ i spełniony jest warunek $v_0^2 < 2\mu lg$.

609. W szklance znajdują się dwie niemieszające się ciecze: czterochlorek węgla CCl_4 i woda. Pod ciśnieniem normalnym CCl_4 wrze w temperaturze 76,7°C. W wyniku równomiernego ogrzewania szklanki w kąpieli wodnej, w temperaturze 65,5° rozpoczyna się wrzenie na granicy rozdziału cieczy. Jaki jest stosunek mas czterochlorku węgla i wody, które wykipią w określonym czasie przy takim „granicznym” wrzeniu? Ciśnienie pary nasyconej wody w temperaturze 65,5° wynosi $p_1 = 25{,}6$ kPa.

608. Ilość wydzielonego ciepła będzie największa, gdy klocek przebędzie maksymalną drogę względem taśmy transportera. Klocek musi dotrzeć do końca transportera z zerową prędkością względem Ziemi. Jego prędkość początkową v otrzymujemy z zależności $\frac{mv^2}{2} = \mu mgl$, gdzie m jest masą klocka. Stąd $v = \sqrt{2\mu gl}$. Po zatrzymaniu klocek zaczyna poruszać się z przyspieszeniem μg w kierunku ruchu taśmy. Prędkość taśmy osiągnie po czasie $\frac{v_0}{\mu g}$, gdy przebędzie względem Ziemi drogę $l_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}$. Ponieważ spełniony jest warunek $v_0^2 < 2\mu gl$, klocek osiągnie prędkość v_0 względem Ziemi, czyli zatrzyma się względem taśmy, zanim spadnie z transportera. Energia kinetyczna klocka w układzie związanym z taśmą transportera od chwili startu do chwili zatrzymania maleje o wielkość $|\Delta E_{\mathrm{k}}| = \frac{m(v_0+v)^2}{2}$ i tyle wynosi maksymalne ciepło wydzielone w układzie: $Q = \frac{m(v_0 + \sqrt{2\mu gl})^2}{2}$.



Rys. 3

609. Ciecz jednorodna wrze, gdy ciśnienie pary nasyconej w pęcherzykach, tworzących się w całej objętości cieczy, równe jest ciśnieniu zewnętrznemu – w rozważanym przypadku atmosferycznemu (dodatkowe ciśnienie wewnątrz pęcherzyka związane z napięciem powierzchniowym i ciśnieniem hydrostatycznym można zaniedbać). Przy wrzeniu „granicznym” w pęcherzykach na granicy wody i CCl_4 znajduje się nasycona para wodna oraz nasycona para czterochlorku węgla, przy czym suma ich ciśnień cząstkowych równa jest ciśnieniu atmosferycznemu p_{a}. Stąd ciśnienie pary nasyconej CCl_4 wynosi $p_2 = p_{\mathrm{a}} - p_1$.

W czasie wrzenia pęcherzyki unoszą się w górę, dochodzą do powierzchni cieczy i pękają. Zatem stosunek mas czterochlorku węgla i wody, które wyparują w określonym czasie, równy jest stosunkowi gęstości par tych substancji $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Korzystając z równania Clapeyrona $\rho = \frac{p\mu}{\mathrm{R}T}$, gdzie μ jest masą molową substancji, otrzymujemy:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2\mu_2}{p_1\mu_1} \approx 25.$$

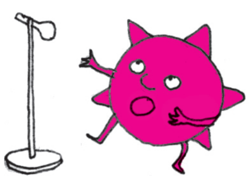
Czterochlorek węgla podczas wrzenia „granicznego” paruje około 25 razy szybciej niż woda.

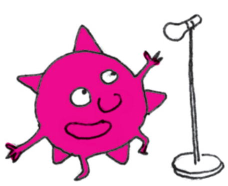
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 705 ($WT = 1{,}87$) i 706 ($WT = 2{,}26$) z numeru 9/2015

Paweł Najman	Kraków	42,85
Jerzy Cisło	Wrocław	39,13
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Janusz Fiett	Warszawa	36,20
Stanisław Bednarek	Łódź	35,50
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77
Paweł Kubit	Kraków	32,98





Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 602 ($WT = 1{,}78$), 603 ($WT = 3{,}28$), 604 ($WT = 1{,}5$) i 605 ($WT = 2{,}2$) z numerów 9–10/2015

Tomasz Wietecha	Tarnów	38,40
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Michał Koźlik	Gliwice	30,96
Marian Łupieżowiec	Gliwice	30,42
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	16,22
Krzysztof Magiera	Łosiów	15,90
Karol Łukanowski	Niemcz	11,97

Zadania z matematyki nr 719, 720

Redaguje Marcin E. KUCZMA

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów; w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leqslant 2(x^2+s)^n.$$

Zadanie 720 (inspirowane zadaniami 194 i 702) zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2015

Przypominamy treść zadań:

711. Czy istnieje nieskończony ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym każda dodatnia liczba całkowita występuje jednokrotnie, przy czym dla każdego n suma $x_1 + \ldots + x_n$ jest podzielna przez n?

712. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równania:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0, \qquad b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0.$$

Obliczyć wartość sumy $a + b$.

711. Istnieją takie ciągi. Jedna z możliwych konstrukcji:

Przyjmujemy $x_1 = 1$. Będziemy przedłużać zdefiniowany odcinek ciągu, dołączając po dwa wyrazy.

Ustalmy liczbę parzystą $n \geqslant 2$ i przyjmijmy, że wyrazy $x_1, \ldots, x_{n-1}$ są już określone. Najmniejsza dodatnia liczba całkowita, różna od $x_1, \ldots, x_{n-1}$, będzie wyrazem x_{n+1} (to gwarantuje, że w budowanym ciągu znajdą się wszystkie liczby całkowite dodatnie).

Określamy wyraz x_n wzorem

$$x_n = k_n n(n+1) + n x_{n+1} - (x_1 + \ldots + x_{n-1}),$$

gdzie k_n jest liczbą całkowitą tak dobraną, by uzyskana liczba x_n była dodatnia oraz różna od liczb $x_1, \ldots, x_{n-1}$ i różna od x_{n+1} (powstający ciąg będzie więc miał wszystkie wyrazy różne). Przy tym

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n(k_n n + k_n + x_{n+1}),$$
$$x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = n(k_n n + k_n + x_{n+1}) + x_{n+1} = (n+1)(k_n n + x_{n+1}).$$

Wymagane warunki podzielności są spełnione. Indukcyjnie powstaje ciąg nieskończony (x_n), jakiego szukamy.

712. Zapiszmy liczby a, b jako $a = 1 + x$, $b = 1 + y$. Wówczas

$$a^3 - 3a^2 + 5a = x^3 + 2x + 3, \qquad b^3 - 3b^2 + 5b = y^3 + 2y + 3,$$

a zadane równania przybierają postać

$$x^3 + 2x = 14, \qquad y^3 + 2y = -14.$$

Po dodaniu stronami:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0.$$

Czynnik w drugim nawiasie jest liczbą dodatnią, wobec czego $x + y = 0$. To daje odpowiedź: $a + b = 2$.