Informatyczny kącik olimpijski (92): Wielomian

W tym miesiącu omówię zadanie *Wielomian*, które pojawiło się na finale Potyczek Algorytmicznych w 2005 roku.

Dany jest wielomian W stopnia (co najwyżej) n, zdefiniowany poprzez jego wartości w punktach $0, 1, 2, \ldots, n$. Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości tego wielomianu w punkcie $n+1$.

Oznaczmy współczynniki wielomianu W przez ciąg liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$, gdzie a_i oznacza współczynnik przy x^i. Najprostszym sposobem rozwiązania tego zadania jest wyznaczenie współczynników wielomianu W, rozwiązując następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_0 = W(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = W(1) \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^n a_n = W(2) \\ \qquad \vdots \\ a_0 + na_1 + n^2 a_2 + \ldots + n^n a_n = W(n) \end{cases}$$

Można to zrealizować za pomocą metody eliminacji Gaussa. Niestety, ten algorytm jest zbyt powolny, ponieważ wykonuje on $O(n^3)$ operacji na liczbach, które mogą rosnąć wykładniczo. Metodę tę można jednak znacznie przyśpieszyć, wykorzystując fakt, że znamy wartości wielomianu W w punktach będących kolejnymi liczbami naturalnymi.

Lemat 1. *Istnieje wielomian W' stopnia co najwyżej $n-1$, taki że $W'(k) = W(k+1) - W(k)$ dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

Dowód. Skoro funkcje $W(x)$ oraz $W(x+1)$ są wielomianami, to również funkcja $W(x+1) - W(x)$ jest wielomianem. Współczynnik wielomianu $W(x)$, przy x^n, wynosi a_n. Natomiast dla wielomianu $W(x+1)$ mamy:

$$a_n(x+1)^n = a_n\left(\binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}\right).$$

Skoro $\binom{n}{n} = 1$, to współczynnik przy x^n wielomianu $W(x+1)$ także jest równy a_n. Z tego wynika, że współczynnik przy x^n wielomianu $W(x+1) - W(x)$ jest równy $a_n - a_n = 0$. $\square$

Korzystając z lematu 1, możemy zredukować stopień wielomianu W, uzyskując problem równoważny. Aby to zrobić, zdefiniujmy ciąg wielomianów $P_0, \ldots, P_n$, taki że $P_n = W$ oraz $P_{i-1}(j) = P_i(j+1) - P_i(j)$ dla $0 < i \leqslant n$ oraz $0 \leqslant j \leqslant i$. Powstały w ten sposób wielomian P_0 ma stopień 0, zatem $P_0(1) = P_0(0)$. Znając wartość wielomianu P_0 w kolejnym punkcie, możemy obliczyć wartości $P_i(i+1)$ dla $0 < i \leqslant n$ bezpośrednio z definicji ciągu wielomianów P. Obliczając nowe wartości kolejnych wielomianów, za każdym razem do poprzednio otrzymanej wartości dodajemy $P_i(i)$, zatem:

$$W(n+1) = \sum_{i=0}^{n} P_i(i).$$

Spróbujmy teraz zapisać $W(n+1)$ w zależności od wartości $W(0), \ldots, W(n)$. Skoro jedynymi operacjami, jakie wykonujemy, są dodawanie i odejmowanie, to wszystkie otrzymane liczby będą liniowo zależne od wartości wielomianu W. Możemy, korzystając z definicji ciągu wielomianów P, zapisać:

$$P_{n-1}(j) = W(j+1) - W(j),$$
$$P_{n-2}(j) = W(j+2) - 2 \cdot W(j+1) + W(j),$$

oraz w ogólności:

$$P_i(j) = \sum_{k=j}^{n-i+j} (-1)^{n-i+j-k} \binom{n-i}{k-j} W(k).$$

Zachęcam Czytelnika, aby sprawdził poprawność tego wzoru i spróbował go udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Po wstawieniu tej równości do wzoru otrzymanego w poprzednim akapicie dostajemy:

$$W(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-i}{k-i} W(k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=n-k}^{n} (-1)^{n-k} \binom{i}{n-k} W(k).$$

Lemat 2. *Prawdziwa jest tożsamość*

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Dowód. Udowodnimy ją za pomocą indukcji względem n. Dla $n = j$ mamy

$$\sum_{i=j}^{j} \binom{i}{j} = 1 = \binom{j+1}{j+1}.$$

W kroku indukcyjnym korzystamy z tożsamości:

$$\sum_{i=j}^{n+1} \binom{i}{j} = \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} + \binom{n+1}{j} =$$
$$= \binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j} = \binom{n+2}{j+1}. \ \square$$

Na podstawie lematu 2 otrzymujemy dla $j = n-k$:

$$W(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{n-k+1} W(k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} W(k).$$

Dzięki tożsamości

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k}(n-k+1)}{k+1}$$

możemy obliczyć powyższą sumę, wykonując liniową ilość operacji na liczbach całkowitych.

Wartości składników tej sumy mogą być bardzo duże, więc dodatkową trudność w tym zadaniu są operacje na dużych liczbach. Na szczęście potrzebujemy jedynie wykonywać sumowanie dużych liczb oraz mnożenie i dzielenie dużych liczb przez małe. Obie te operacje można łatwo zrealizować w czasie liniowym względem długości liczby. Zatem ostatecznie otrzymujemy złożoność czasową $O(n^2)$.

Paweł BURZYŃSKI