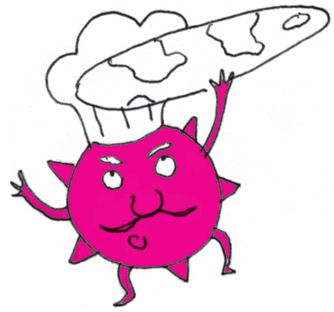


płaski *niewypukły i niewklęsły, niemający wyniosłości i wgłębień; stanowiący płaszczyznę, równy* (Słownik języka polskiego PWN)

Czy Ziemia jest płaska?

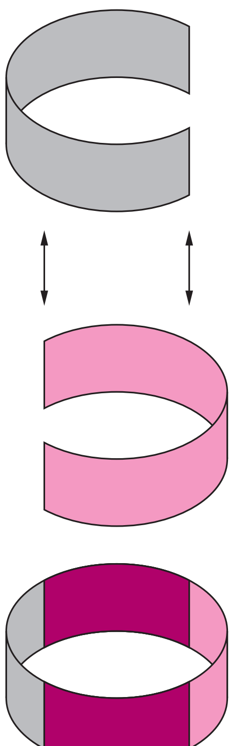
*Michał MIŚKIEWICZ**

Pozwolę sobie podtrzymać Czytelnika w napięciu i tytułowe pytanie tymczasem zostawię bez odpowiedzi. Zacznę za to od refleksji, czym jest *płaskość*.

Każdy rozsądny człowiek za prototyp płaskiej powierzchni uzna fragment płaszczyzny, na przykład w postaci kartki papieru leżącej na stole. A jeśli taką kartkę wygiąć w kształt walca, czy nadal jest ona płaska? Tutaj zdania mogą być podzielone. Większość z nas uzna, że nie, i całkiem słusznie, bo takie znaczenie ma w codziennym języku słowo *płaski*. Warto jednak zauważyć, że w myśl takiej definicji świat powierzchni płaskich jest bardzo ubogi – ogranicza się do jednej jedynej płaszczyzny.

W matematyce funkcjonuje alternatywna definicja, która opiera się wyłącznie na wewnętrznych własnościach danej powierzchni, a nie na tym, jak ową powierzchnię ułożymy w przestrzeni czy wygniemy. Przez *geometrię wewnętrzną* powierzchni rozumiemy ogół takich własności – wszystkie wyniki pomiarów długości krzywych leżących na tej powierzchni. Dwie powierzchnie nazwiemy izometrycznymi, jeśli istnieje między nimi *izometria*, to jest ciągłe przekształcenie zachowujące wszystkie powyższe wielkości. Ostatecznie, powierzchnię uznamy za *płaską*, jeśli da się ją podzielić na fragmenty, z których każdy jest izometryczny z fragmentem płaszczyzny.

Przejdźmy do przykładów. Pierwszym przykładem izometrii jest właśnie wspomniane wcześniej wygięcie kartki. Istotnie, dowolna krzywa narysowana na kartce po wygięciu ma tę samą długość, co i przedtem. Widzimy więc, że w myśl naszej definicji zgięta kartka jest izometryczna z wyprostowaną, w szczególności nadal jest płaska.



Rys. 1

Podobnie jest z powierzchnią boczną walca. Nie jest ona co prawda izometryczna z fragmentem płaszczyzny (dlaczego?), składa się jednak z dwóch fragmentów, z których każdy daje się wyprostować (rysunek 1). W związku z tym powierzchnia boczna walca jest płaska, podobnie sprawa ma się też z powierzchnią boczną stożka.

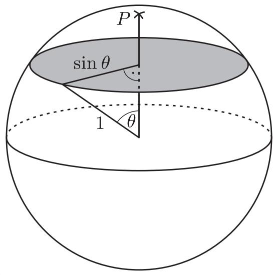
Spróbujmy teraz odpowiedzieć na pytanie zadane w tytule. Dla uproszczenia przyjmijmy, że powierzchnia Ziemi ma kształt sfery i zapytajmy: czy sfera jest płaska? Zauważmy, że problem jest istotnie trudniejszy niż dotychczasowe rozważania – by wykazać, że powierzchnia jest płaska, wystarczy wskazać odpowiednie przekształcenie lub przekształcenia. Jeśli natomiast chcemy zaprzeczyć płaskości, musimy się upewnić, że żadne takie przekształcenie nie istnieje. W tym celu zazwyczaj wprowadza się *niezmienniki*. W naszym przypadku będzie to... wzór na długość okręgu.

Aby wyznaczyć taki wzór, możemy posługiwać się wyłącznie pojęciami geometrii wewnętrznej. Na początek zauważmy, że możemy określić odległość między dwoma punktami A, B powierzchni $\mathcal{S}$ jako kres dolny (w rozważanych tu przypadkach zawsze będzie to minimum) długości krzywych o początku w A i końcu w B zawartych w $\mathcal{S}$.

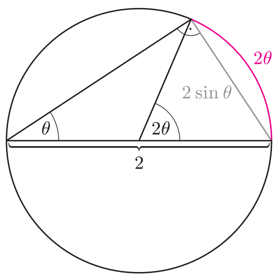
Dla płaszczyzny takie minimum jest osiągane dla odcinka AB, więc zdefiniowana właśnie odległość pokrywa się ze standardową. Natomiast na sferze krzywą o minimalnej długości jest łuk AB okręgu wielkiego (czyli okręgu otrzymanego jako przekrój sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Przykładowo na sferze o promieniu R odległość między dwoma punktami antypodycznymi jest długością połowy równika, a więc wynosi πR, podczas gdy standardowa odległość w przestrzeni to $2R$.

Nie będzie zaskoczeniem, jeśli okrąg o środku P i promieniu r (oznaczany jako $S(P, r)$) zdefiniujemy jako zbiór wszystkich punktów powierzchni odległych od punktu P o r. Przez $|S(P, r)|$ oznaczymy długość tej krzywej. Oczywiście, na płaszczyźnie długość ta wyraża się wzorem $2\pi r$. A jak jest na sferze o promieniu R? Zauważmy, że dowolny okrąg o promieniu większym od πR

*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 2



Rys. 3

okazuje się zbiorem pustym, nie ma więc co mówić o jego długości. Natomiast okrąg o promieniu $\frac{\pi}{2}R$ jest okręgiem wielkim, toteż ma długość $2\pi R$. Widzimy w szczególności, że zdefiniowane właśnie okręgi na sferze są w przestrzeni jednocześnie okręgami w zwyczajnym sensie – dla uniknięcia nieporozumień w drugim przypadku będziemy mówić o okręgu *euklidesowym*, z *euklidesowym* środkiem i promieniem.

Dla ustalenia uwagi za punkt P przyjmijmy biegun północny sfery i ustalmy promień sfery równy 1. Wówczas okrąg $S(P,\theta)$ jest równoleżnikiem odpowiadającym szerokości geograficznej $\frac{\pi}{2}-\theta$ (kąty mierzymy tu w radianach). Jak pokazuje rysunek 2, ma on euklidesowy promień równy $\sin\theta$. W ten sposób otrzymujemy wzór na długość okręgu

$$|S(P,\theta)| = 2\pi\sin\theta.$$

Wiemy, że na płaszczyźnie byłoby to $2\pi\theta$. Porównanie długości łuku i cięciwy na rysunku 3 pokazuje, że $\sin\theta < \theta$, a więc okręgi na sferze są krótsze od ich odpowiedników na płaszczyźnie. Gdyby pewne otoczenie punktu P na sferze było izometryczne z fragmentem płaszczyzny, to te dwa wzory musiałyby się pokrywać, przynajmniej dla odpowiednio małych wartości θ.

W ten sposób możemy z ulgą skonstatować, że Ziemia nie jest płaska.

Kombinatoryka ekstremalna i przesuwanie zbiorów

*Damian ORLEF**

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Najogólniej mówiąc, kombinatoryka ekstremalna zajmuje się pytaniami o to, jaki jest rozmiar największego (lub najmniejszego) możliwego zbioru obiektów danego typu, spełniającego pewien zadany warunek i jak takie ekstremalne przypadki wyglądają. Wiele z nich dotyczy rodzin zbiorów, jak np.

Pytanie 1. Jaka jest największa rodzina podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, której każde dwa elementy mają niepuste przecięcie?

Rodzinę spełniającą ten warunek nazywać będziemy *przecinającą się*. Oznaczmy dla wygody $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$. Nietrudno wskazać przykład sporej rodziny przecinającej się: dla dowolnego $a \in [n]$ spełnia ten warunek rodzina wszystkich podzbiorów $[n]$, które zawierają a, składająca się z 2^{n-1} zbiorów. Więcej już nie uzyskamy, o czym przekonamy się, ustawiając wszystkie podzbiory zbioru $[n]$ w 2^{n-1} par postaci $\{A, [n]\setminus A\}$. Dowolna rodzina przecinającą się zawiera co najwyżej jeden zbiór z każdej pary, więc jej liczność nie przekracza 2^{n-1}, co chcieliśmy wykazać.

Wybór podzbioru $[n]$ zawierającego a jest równoważny wyborowi pozostałych elementów, czyli dowolnego podzbioru zbioru $[n]\setminus\{a\}$.

Nie odpowiedzieliśmy jednak na pytanie o to, jak wyglądają wszystkie przecinające się rodziny podzbiorów $[n]$, które osiągają 2^{n-1} elementów. Te przedstawione nie są jedyne.

Po tej udanej rozgrzewce rozważmy podobny problem dla rodzin *r-jednorodnych*, tzn. składających się tylko ze zbiorów ustalonej mocy $r \in [n]$.

Pytanie 2. Jaka jest największa r-jednorodna, przecinającą się rodzina podzbiorów zbioru $[n]$?

Taką rodzinę będziemy nazywać w skrócie (r,n)-*rodziną*. Dla $r > n/2$ widać, że nawet rodzina wszystkich r-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ jest (r,n)-rodziną, więc w dalszym ciągu zakładamy, że $1 \leqslant r \leqslant n/2$.

Modyfikując wcześniejszy przykład, możemy wskazać (r,n)-rodzinę wszystkich r-elementowych podzbiorów $[n]$ zawierających pewną ustaloną liczbę $a \in [n]$; rodzina ta liczyć będzie $\binom{n-1}{r-1}$ elementów. Podobnie jak wcześniej, więcej się nie da, ale dowód maksymalności jest teraz bardziej wymagający. My skorzystamy z ciekawej i bardzo użytecznej techniki *przesuwania* (ang. *shifting*) rodziny zbiorów, która ograniczy nasz problem do dość wygodnych rodzin.

Wybieramy $(r-1)$ elementów zbioru $A\setminus\{a\}$ spośród $(n-1)$ elementów zbioru $[n]\setminus\{a\}$.

O co chodzi w przesuwaniu? Zakładamy, że dana jest pewna rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów $[n]$. Dla dowolnej pary liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ określamy operację s_{ij} na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ jako „podmianę” liczby j na i, o ile jest to możliwe i o ile prowadzi do powstania zbioru spoza $\mathcal{F}$. Bardziej precyzyjnie

$$s_{ij}(A) = \begin{cases} (A\setminus\{j\})\cup\{i\}, & \text{jeśli } j\in A,\ i\notin A \text{ oraz } (A\setminus\{j\})\cup\{i\}\notin\mathcal{F},\\ A, & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Widać, że definicja $s_{ij}(A)$ zależy nie tylko od A, ale też od rodziny $\mathcal{F}$, którą rozważamy, więc lepiej byłoby pisać $s_{ij}^{\mathcal{F}}(A)$ zamiast $s_{ij}(A)$, ale na szczęście i tak nie napotkamy na kłopoty w oznaczeniach.