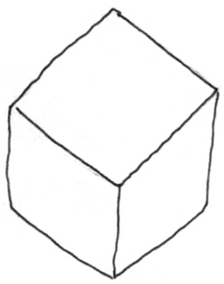
Analiza na kostce dyskretnej

*Krzysztof OLESZKIEWICZ**, *Łukasz RAJKOWSKI**

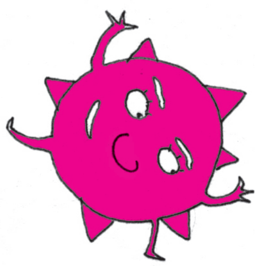


Kostką dyskretną wymiaru n nazywamy $\{-1,1\}^n$, czyli zbiór wierzchołków kostki $[-1,1]^n$, stanowiącej n-wymiarowy odpowiednik sześcianu. Rozważmy na niej działanie mnożenia po współrzędnych,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

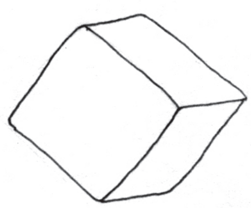
Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych wierzchołków kostki u, v, w:

- $u \cdot v$ również jest wierzchołkiem kostki oraz $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$,
- $u \cdot (1, 1, \ldots, 1) = (1, 1, \ldots, 1) \cdot u = u$, czyli $(1, 1, \ldots, 1)$ jest „wierzchołkiem neutralnym” przedstawionego działania,
- $u \cdot u = (1, 1, \ldots, 1)$, zatem dla każdego wierzchołka istnieje „wierzchołek odwrotny”, czyli... on sam,
- $u \cdot v = v \cdot u$, w związku z czym badane działanie jest *przemienne*.



Przedstawione własności czynią z kostki dyskretnej z mnożeniem po współrzędnych *grupę przemienną*. Na skończonych (a także, ogólniej, lokalnie zwartych) grupach przemiennych można uprawiać analizę harmoniczną – jak zaraz zobaczymy, na kostce dyskretnej wystarczy do tego bardzo elementarny język.

Przyporządkujmy każdemu z wierzchołków liczbę rzeczywistą. Możemy oczywiście zrobić to na wiele różnych sposobów i każde takie przyporządkowanie jest niczym innym, jak *funkcją* określoną na kostce dyskretnej. Mając do dyspozycji dwie takie funkcje, f i g, wprowadźmy ich *iloczyn skalarny*, czyli sumę iloczynów wartości tych funkcji, rozciągającą się po wszystkich 2^n wierzchołkach:



$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)g(x).$$

Każdy wierzchołek ma n współrzędnych, więc dla każdego $A \subseteq [n]$ możemy rozpatrzyć funkcję, która wierzchołkowi przyporządkowuje iloczyn współrzędnych o wskaźnikach ze zbioru A, tzn. funkcję

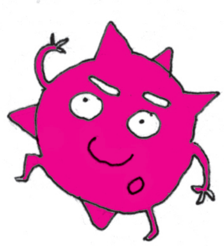
$$w_A(x) = \prod_{i\in A} x_i.$$

Przyjmujemy ponadto $w_\emptyset \equiv 1$. Oczywiście, funkcji tych jest dokładnie tyle co podzbiorów $[n]$, czyli 2^n. Dla $A \neq \emptyset$ mamy

$$\sum_{x\in\{-1,1\}^n} w_A(x) = 0. \tag{1}$$

Aby się o tym przekonać, wybierzmy dowolną liczbę $k \in A$ i zauważmy, że

$$w_A(x_1, \ldots, x_{k-1}, -1, x_{k+1}, \ldots, x_n) = -w_A(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$



zatem składniki sumy (1) można pogrupować w „anulujące się” pary. Dla dowolnych $A, B \subseteq [n]$ i dowolnego wierzchołka x mamy też

$$\begin{aligned} w_A(x)w_B(x) &= \prod_{i\in A} x_i \prod_{i\in B} x_i = \prod_{i\in A\setminus B} x_i \prod_{i\in A\cap B} x_i^2 \prod_{i\in B\setminus A} x_i = \\ &= \prod_{i\in A\setminus B} x_i \prod_{i\in B\setminus A} x_i = \prod_{i\in A\div B} x_i = w_{A\div B}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Równości (1) oraz (2) pozwalają łatwo sprawdzić, że jeśli $A \neq B$, to $\langle w_A, w_B\rangle = 0$, a $\langle w_A, w_A\rangle = 2^n$. Funkcje w_A dla $A \in [n]$ tworzą zatem *układ ortogonalny*. Nietrudno udowodnić, że jest to układ zupełny, tzn. *każdą* funkcję $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ można *w dokładnie jeden* sposób przedstawić w postaci sumy $\sum_{A\subseteq[n]} a_A w_A$, gdzie $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, zaś $(a_A)_{A\subseteq[n]}$ są współczynnikami rzeczywistymi. Sumy takie, zwane rozwinięciami Fouriera–Walsha, pełnią na kostce dyskretnej rolę zbliżoną do tej, którą w klasycznej analizie harmonicznej odgrywają rozwinięcia funkcji okresowych w trygonometryczne szeregi Fouriera, tj. szeregi postaci $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$. Nieco więcej na ten temat można przeczytać w [1].

*Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

[1] K. Oleszkiewicz, *O pewnym zastosowaniu analizy harmonicznej w rachunku prawdopodobieństwa*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 27 (2001), 44–45 (dostępne on-line).
[2] J. Jendrej, K. Oleszkiewicz i J. O. Wojtaszczyk, *On some extensions of the FKN theorem*, ma niebawem ukazać się w ogólnodostępnym internetowym czasopiśmie *Theory of Computing*.

Wśród funkcji określonych na kostce dyskretnej szczególne zainteresowanie budzą w ostatnich latach funkcje przyjmujące tylko wartości -1 i 1. Każdą funkcję $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ można bowiem naturalnie utożsamić z podzbiorem $f^{-1}(1)$ zbioru wszystkich podzbiorów zbioru $[n]$. To jednoznaczne przyporządkowanie przydaje się w badaniu zagadnień kombinatorycznych, natomiast z punktu widzenia informatyki teoretycznej ciekawsze jest rozumienie f jako procedury, która z n bitów danych wejściowych (*input*) tworzy jeden bit wyniku, co odpowiada rozmaitym procesom decyzyjnym czy klasyfikacyjnym. O przydatności tego typu rozważań pisał w *Delcie* 4/2015 Andrzej Dąbrowski. Badaniem funkcji $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$, które bliskie są funkcjom afinicznym, zajmujemy się również na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW ([2]).

Prawdopodobieństwo i podzielność

Wybieramy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tak, że prawdopodobieństwo wyboru liczby m z tego zbioru jest równe $p_m \geqslant 0$ i $\sum_{m=1}^{m=n} p_m = 1$.

Określamy dla $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ zdarzenia losowe A_k, polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez k.

Rozważmy następujący problem:

Dla jakich $n \geqslant 2$ można określić liczby p_m tak, aby dla wszystkich k było $P(A_k) = \frac{1}{k}$?

Wydaje się, że jest to możliwe dla bardzo wielu n. Można jednak to zrobić tylko dla $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Dla $n = 2$ mamy $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

Dla $n = 3$ mamy $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3}$.

Dla $n = 4$ mamy $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{1}{4}$.

Dla $n = 6$ mamy $p_1 = \frac{2}{15}$, $p_2 = \frac{1}{12}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{4}$, $p_5 = \frac{1}{5}$, $p_6 = \frac{1}{6}$.

Zachęcam Czytelnika do kontynuacji próby określenia liczb p_m dla $n = 5$: $p_5 = \frac{1}{5}$, $p_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

Edward STACHOWSKI

Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

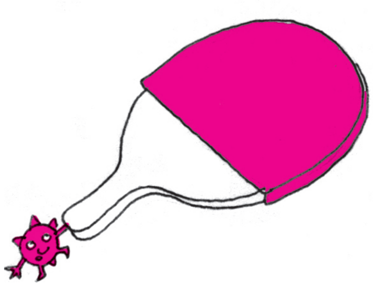
M 1489. Znaleźć liczbę wielokrotności 1001, które można zapisać w postaci $10^n - 10^m$, gdzie n oraz m są liczbami całkowitymi spełniającymi $1 \leqslant m < n \leqslant 2016$.
Rozwiązanie na str. 6

M 1490. Udowodnić, że istnieje 5000 liczb 10-cyfrowych podzielnych przez 17, takich że każdą z nich można otrzymać z dowolnej z pozostałych poprzez zmianę kolejności cyfr.
Rozwiązanie na str. 12

M 1491. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Oblicz promień tego okręgu, wiedząc, że $AB = BC = CD = 1$ oraz $DE = EF = FA = 2$.
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Michał NAWROCKI

F 901. Dane są dwie sprężyny, wykonane z takiego samego materiału, każda składająca się z jednakowych, następujących po sobie zwojów. Średnice sprężyn wynoszą odpowiednio 3 i 9 mm, ich długości 1 i 7 cm, a średnica drutu, z którego są wykonane, to 0,2 i 0,6 mm. Współczynnik sprężystości pierwszej sprężyny wynosi $k = 14$ N/m. Ile wynosi współczynnik sprężystości drugiej sprężyny?
Rozwiązanie na str. 16



F 902. Piłeczka pingpongowa opuszczona bez prędkości początkowej z wysokości H na nieruchomą rakietkę odbija się na wysokość $0{,}64H$. Chłopiec podbija periodycznie taką piłeczkę pionowo do góry tak, że po każdym uderzeniu wznosi się ona na wysokość $h = 0{,}9$ m powyżej rakietki. Z jaką prędkością rakietka porusza się ku górze w momencie uderzenia? Przyjmujemy, że masa rakietki jest dużo większa od masy piłeczki.
Rozwiązanie na str. 7