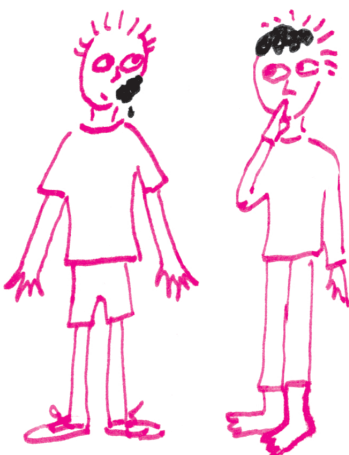
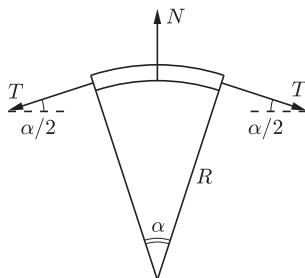


O podobnych zagadnieniach pisaliśmy w *Delcie* 2/2006 w artykule *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*.



Rozwiązanie zadania F 897.
Podzielmy pierścień na małe odcinki, takie że $\alpha R \rightarrow 0$.



Na każdy odcinek działają siły naciągu pierścienia T i reakcji walca N . Ich suma jest równa zero, bo pierścień nie obraca się. Stąd

$$N = 2T \sin \frac{\alpha}{2},$$

co dla małych α daje $N = \alpha T$. Stąd możemy obliczyć siłę tarcia, działającą na taki odcinek, przy przesuwaniu pierścienia wzdłuż walca:

$$f_{TR} = \mu N = \mu \alpha T.$$

Sumując siły tarcia, działające na wszystkie małe odcinki pierścienia, na które podzieliśmy jego długość, otrzymujemy całkowitą siłę tarcia:

$$F_{TR} = \sum_i (f_{TR})_i = \mu T \sum_i (\alpha_i) = 2\pi \mu T.$$

Wiem, że coś wiesz Wojciech CZERWIŃSKI

Najwytrwalsi Czytelnicy *Delty* mogą znać tę zagadkę. Pojawia się ona w wielu wariantach, my zajmiemy się wersją błotną.

W kałuży bawi się n dzieci. W pewnym momencie przychodzi tata-matematyk, i mówi: „Widzę, że co najmniej jedno z Was jest umazane błotem na twarzy”. Nie trzeba dodawać, że zarówno tata, jak przystało na matematyka, a także wszystkie dzieci są niesłychanie bystre. Nie popełniają błędów i umieją wydedukować wszystko, co się da. Po tej wypowiedzi tata pyta: „To z Was, które wie, czy jest umazane na twarzy, niech podniesie rękę do góry”. Dzieci, które wiedzą, istotnie podnoszą ręce. Tata jednak jest uparty i znowu zadaje to samo pytanie. Dzieci znowu podnoszą ręce i historia się powtarza do momentu, gdy wszystkie dzieci będą wiedziały, czy są brudne, czy nie. Pytanie brzmi: jak rozwine się sytuacja? W szczególności, czy może się zdarzyć, że dzieci, razem z tatą, będą siedziały w błocie przez całą wieczność, a przynajmniej do czasu, aż im się nie znudzi?

Zachęcamy bardzo wszystkich Czytelników do próby rozwiązania zagadki przed przeczytaniem dalszej części tekstu!

Zanim dojdziemy do rozwiązania, spróbujmy zastosować typową taktykę: rozważmy małe przypadki. Co się więc stanie, gdy dokładnie jedno dziecko – Adaś – będzie umazane błotem? Adaś zorientuje się natychmiast, że to o niego chodzi, bo wszyscy inni mają czyste twarze. Natomiast jego rodzeństwo, widząc umazanego Adasia, nie będzie wiedziało, czy oni są czysti, czy brudni. A więc na pierwsze pytanie taty rękę podniesie tylko Adaś. Po tym, gdy pozostałe dzieci zobaczą, że Adaś podniósł rękę, zorientują się, że tylko on jest umazany. W przeciwnym bowiem przypadku nie mogłyby się zorientować, że tak jest. Zatem na drugie pytanie taty już wszyscy podniosą ręce.

No dobrze, a co będzie, gdy brudni będą zarówno Adaś, jak i Basia, a pozostali będą czysti? Przy pierwszym pytaniu taty nikt nie podniesie ręki, bo każde z dzieci będzie widziało kogoś umazanego: Adaś i Basia siebie nawzajem, a pozostałe dzieci ich oboje. Potem zdarzy się jednak coś ciekawego. Basia pomyśli w następujący sposób: „Gdybym ja była czysta, to Adaś widziałby same czyste twarze i zorientował się, że w związku z tym musi być brudny. I wtedy podniósłby rękę przy pierwszym pytaniu. Nie zrobił tego jednak, więc moja twarz musi być umazana”. Basia w związku z tym podniesie rękę przy drugim pytaniu taty, oczywiście analogicznie pomyśli i zrobi Adaś. Pozostałe dzieci będą widziały dwójkę brudnego rodzeństwa, więc nie będą miały powodu, żeby po pierwszym głosowaniu pomyśleć tak jak Adaś i Basia. Nie będą też miały żadnych przesłanek (do chwili drugiego pytania), że one są czyste, więc przy drugim pytaniu nie podniosą rąk. Po nim jednak natychmiast zorientują się, że Adaś i Basia mogli przeprowadzić swoje rozumowanie i zrozumieć, że mają umazane twarze, tylko o ile jedynie oni byli brudni – czyli wszyscy pozostali są czysti. A więc przy trzecim pytaniu taty podniosą ręce wszystkie dzieci.

Być może Domyślni Czytelnicy zaczynają już powoli podejrzewać, jak będzie w przypadku ogólnym. Przyjrzyjmy się jednak sytuacji, gdy brudnych jest trójka dzieci: Adaś, Basia i Czarek. Czarek widzi, że (oprócz, być może, niego) brudni są tylko Adaś i Basia. Po drugim pytaniu taty widzi jednak, że nie podnieśli oni rąk, czyli nie są jedynymi z umazaną twarzą. Nie można już mieć dłużej wątpliwości: on też należy do tych ubrudzonych. A zatem Czarek, a także Adaś i Basia, podniosą ręce przy trzecim pytaniu taty. Pozostałe dzieci zorientują się dopiero potem, że ich twarze są czyste i zgłoszą to przy czwartym pytaniu.

Nietrudno zauważyć, że powyższe rozumowanie można prowadzić dalej. Przy dokładnie k brudnych dzieciach podniosą one ręce przy k -tym pytaniu, a te czyste przy pytaniu $(k + 1)$ -szym. Ale czy to rozwiązuje sprawę? Wielu Czytelników zapewne zgodzi się, że tak konkretnie to ciężko się przyczepić do jakiegoś argumentu, ale nadal problem wydaje się skrywać jakieś tajemnice.

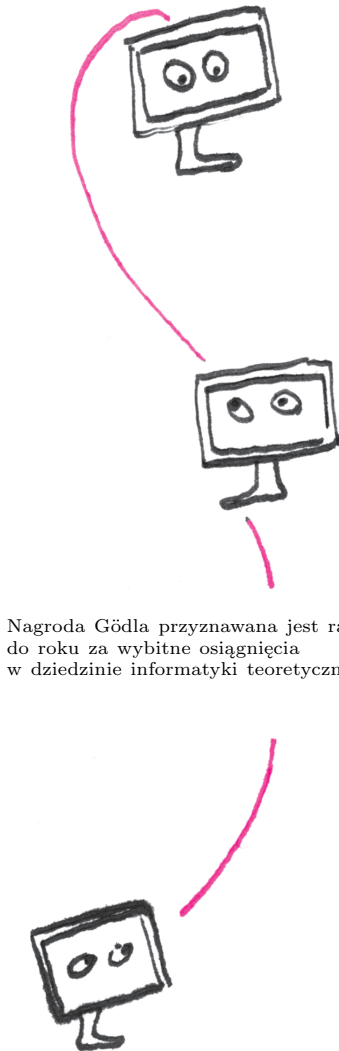
Można przykładowo mieć następującą wątpliwość. Przypuśćmy, że liczba ubrudzonych dzieci jest większa niż jeden, wtedy każdy wie, że ktoś jest

umazany błotem, bo po prostu go widzi. Wydaje się więc, że tata – przychodząc i informując o tym – nie odkrywa Ameryki, mówi coś, o czym wie każdy, więc nie wnosi żadnej nowej informacji. Czy mógłby zatem ominąć początkowe stwierdzenie i zacząć od zadawania pytań, kto wie, czy jest brudny? Chwila zastanowienia prowadzi do konkluzji, że nie, samo zadawanie pytań o stan czystości do niczego nie doprowadzi. Dzieci, razem zresztą ze zbyt optymalizującym tatą, spędziłyby całe popołudnie na monotonnej grze w niepodnoszenie rąk. Cóż więc wniosło powiedzenie faktu, który znał każdy?

Okazuje się, że jednak coś istotnego wniosło. Wyjaśnijmy to najpierw dla dwójki brudnych dzieci. Owszem, każdy wiedział, że ktoś jest brudny. Nie każdy jednak wiedział, czy każdy wie, że ktoś jest brudny. Przykładowo Adaś nie wiedział, czy Basia wie, że ktoś jest brudny. No bo gdyby Adaś nie był brudny, to Basia nie widziałaby nikogo brudnego. A co dla trójki brudnych dzieci: Adasia, Basi i Czarka? Wówczas każdy wie, że każdy wie, że ktoś jest brudny. Ale nie każdy wie, czy każdy wie, czy każdy wie, że ktoś jest brudny! Przykładowo Adaś nie wie, czy Basia wie, czy Czarek wie, że jest ktoś brudny. Bo gdyby Adaś był czysty, to jedynie Basia i Czarek byliby brudni i wtedy Basia nie wiedziałaby, czy Czarek widzi kogokolwiek brudnego. Uogólniając te spostrzeżenia, widzimy więc, że to, co tata wniósł do sprawy to fakt, że każdy wie, że każdy wie, że każdy wie. . . i tak powtórzone dowolnie wiele razy, że ktoś jest brudny!

Nasze rozważania przydają się nie tylko do tego, żeby na imprezie u znajomych zablysnąć nieoczywistą zagadką. W roku 1997 Joseph Halpern i Yoram Moses otrzymali prestiżową Nagrodę Gödla za pracę nad wiedzą, a w szczególności wiedzą powszechną (ang. *common knowledge*) i zastosowaniem swojej teorii do dziedziny systemów rozproszonych. Możemy zamienić dzieci z zagadki na komputery, które razem wykonują pewne obliczenia i komunikują się przez sieć. Nie zawsze „wiedzą” one, co „wiedzą” inne komputery, mogą się dowiedzieć jedynie, jeśli dostaną jakiś komunikat. W analizie programów, które są wykonywane przez sieć komputerową (tzn. przeznaczonych do obliczeń rozproszonych), zasadniczą rolę odgrywa właśnie pojęcie wiedzy. Kluczowym spostrzeżeniem autorów artykułu była obserwacja, że nieformalne pojęcie wiedzy da się ująć w precyzyjne matematyczne ramy. W szczególności wiedza powszechna została doprecyzowana właśnie jako sytuacja, gdy dla dowolnego k zachodzi: „każdy wie” powtórzone k razy o pewnym interesującym nas fakcie. Wcześniej, oczywiście, trzeba było zdefiniować formalnie, co to znaczy, że komputer coś wie, ale w to nie będziemy się teraz wgłębiać.

Praca Halperna i Mosesa miała wielki wpływ na dziedzinę obliczeń rozproszonych. Zainspirowała także nowe badania w kryptografii i sztucznej inteligencji. Może czeka nas w przyszłości jeszcze więcej ważnych odkryć, których podstawą są fenomeny możliwe do dostrzeżenia bez żadnego zaawansowanego aparatu matematycznego. A kto wie, może nawet dokonane przez Czytelników *Delty*.



Nagroda Gödla przyznawana jest raz do roku za wybitne osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej.

Orzeł czy reszka?

Są trzy symetryczne monety. Pierwsza, M_1 , ma orły po obu stronach, druga, M_2 , ma reszki po obu stronach, a trzecia, M_3 , jest normalna. Wybrano losowo jedną z tych monet, podrzucono ją i po upadku na blat stołu na wierzchu ukazał się orzeł. Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że po drugiej stronie tej monety też jest orzeł. Często spotykamy takie rozwiązanie:

- 1) Na pewno nie jest to moneta M_2 , która ma reszki po obu stronach. *Prawda*.
- 2) Jest to więc moneta M_1 albo M_3 . *Prawda*.
- 3) Stąd wynika, że prawdopodobieństwo tego, że jest to moneta M_1 , jest równe $\frac{1}{2}$. *Nieprawda*. Przypadki opisane w podpunkcie 2 nie są jednakowo prawdopodobne.

Aby się o tym przekonać, sformalizujmy nasz problem. Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

M_k – wylosujemy monetę o numerze k ,
 O – otrzymamy orła.

Z treści zadania wynika, że $P(M_k) = \frac{1}{3}$ i $P(O) = \frac{1}{2}$. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(M_1 | O)$:

$$P(M_1 | O) = \frac{P(M_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Ten wynik nie powinien być zaskakujący. Oznaczmy orły na pierwszej monecie przez O_1 oraz O_2 , a orła na trzeciej monecie przez O_3 . Prawdopodobieństwo otrzymania orła z numerem n jest równe $P(O_n) = \frac{1}{6}$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$. Otrzymaliśmy jedno z trzech jednakowo prawdopodobnych zdarzeń O_1, O_2, O_3 . Dwa spośród nich wskazują na pierwszą monetę. Czytelnik Dociekliwy zauważy, że ten sam wynik otrzymamy w przypadku, gdy trzecia moneta jest symetryczna, a pozostałe dwie niekoniecznie.

Edward STACHOWSKI