Trójkątne dowody

Joanna JASZUŃSKA

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ dla liczb całkowitych $n, k \geqslant 0$ oznacza liczbę sposobów wybrania zbioru k elementów spośród n. W szczególności $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Ze zbioru $(n+1)$-elementowego z jednym elementem wyróżnionym $k+1$ elementów można wybrać, biorąc wyróżniony element i k z pozostałych n, albo wybierając wszystkie $k+1$ spośród n niewyróżnionych. Stąd $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Z symboli Newtona można zbudować *trójkąt Pascala* (rys. 1), w którym w n-tym wierszu (numerując od 0) stoją kolejno wartości $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Na mocy powyższych wzorów liczby wzdłuż ramion trójkąta są równe 1, a wewnątrz *każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących nad nią* $(*)$.

Każda jedynka prócz $\binom{0}{0}$ też spełnia warunek $(*)$: jest sumą jedynki nad nią i umownego zera na zewnątrz trójkąta.

Korzystając z trójkąta Pascala i własności $(*)$ można udowodnić wiele tożsamości.

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$

$$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

$$\binom{5}{0}=1 \quad \binom{5}{1}=5 \quad \binom{5}{2}=10 \quad \binom{5}{3}=10 \quad \binom{5}{4}=5 \quad \binom{5}{5}=1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Rys. 1. Na dalszych rysunkach liczby oznaczamy kropkami.

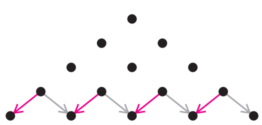
1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ oraz $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ dla $n > 0$.

2. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

3. $\displaystyle T_n \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$ oraz $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k = \binom{n+2}{3}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

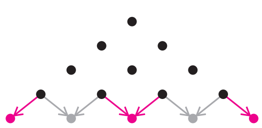
Rozwiązania



Rys. 2

R1. Dla $n = 0$ suma $\binom{n}{k}$ równa jest $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$. W kolejnych wierszach, na mocy $(*)$, suma liczb jest dwukrotnością sumy poprzedniego wiersza (rys. 2), uzyskujemy więc kolejne potęgi dwójki.

Suma $\binom{n}{k}$ dla k parzystych równa jest sumie $\binom{n}{k}$ dla k nieparzystych (i równa sumie wyrazów poprzedniego wiersza, rys. 3). Stąd różnica tych dwóch sum daje zero. □

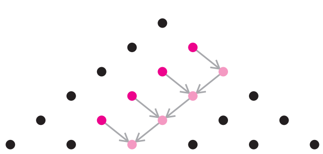


Rys. 3

R2. Sumujemy wyrazy jak na rysunku 4, od góry, korzystając z $(*)$. □

R3. Z rysunku 4 i z poprzedniego zadania $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ oraz

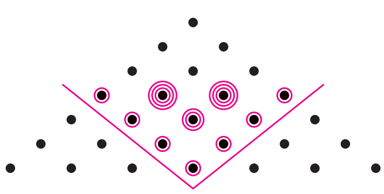
$$\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}. \ \square$$



Rys. 4

R4. Element $\binom{2n}{n}$ jest środkowym wyrazem wiersza numer $2n$. Na mocy $(*)$ jest on sumą dwóch wyrazów nad nim, a więc też sumą trzech wyrazów o dwa wiersze wyżej, przy czym środkowy z nich liczymy dwukrotnie. Stąd jest także sumą czterech środkowych wyrazów jeszcze wyższego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiednio 1, 3, 3, 1, itd. Na rysunku 5 zilustrowano uzyskane w ten sposób dwa „przenikające się” trójkąty Pascala — wyjściowy oraz drugi „do góry nogami”, oznaczający krotności, z jakimi liczyć należy wyrazy z coraz wyższych wierszy.

Trójkąty te mają wspólny n-ty wiersz i stąd $\binom{2n}{n}$ jest sumą wyrazów tego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiadającymi im samym, co kończy dowód. □



Rys. 5

Zadania domowe

5. Wykaż, że $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}(n-k+1) = \binom{n+2}{m+2}$.

6. Niech $0 \leqslant a, b \in \mathbb{N}$. Wyznacz sumę tych $\binom{n}{k}$, dla których $n-k \leqslant a$ oraz $k \leqslant b$.

Wskazówka 5 i 6. Zinterpretuj szukane sumy na trójkącie Pascala i skorzystaj z zadania 2.

7. Niech $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$. Wykaż, że $S_{n+1} = 3 \cdot 2^{3n} - S_n$.

Wskazówka 7. Przyda się zadanie 1 oraz rozumowanie jak w rozwiązaniu zadania 4.