Informatyczny kącik olimpijski (90): Zapis wieżowy

Tym razem omówimy rozwiązanie zadania *Zapis wieżowy* z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym z 2006 roku. Dla ciągu n liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz liczby naturalnej m należy wyznaczyć resztę z dzielenia przez m wieży potęgowej, w której liczby z ciągu są kolejnymi wykładnikami. Innymi słowy, mamy znaleźć wartość wyrażenia

$$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}} \bmod m.$$

Przykładowo, $3^{2^3} \bmod 7 = 2$, gdyż $3^{2^3} = 3^8 = 6561 = 937 \cdot 7 + 2$. Oczywiście, bezpośrednie obliczanie potęg nie wchodzi w grę, gdyż ich wartości rosną coraz szybciej z każdym dodatkowym wykładnikiem i już liczba $4^{3^{2^3}}$ ma 3951 cyfr. Dla uproszczenia zapisu wieżę potęgową będziemy oznaczali przez $a_{1\uparrow n}$.

W rozwiązaniu zadania pomoże nam twierdzenie Eulera, które mówi, że dla względnie pierwszych liczb naturalnych a i m spełniona jest kongruencja

$$(*) \qquad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

gdzie $\varphi(m)$ oznacza liczbę liczb względnie pierwszych z m i nie większych niż ta liczba. Jeśli zatem liczby a_1 i m byłyby względnie pierwsze, to moglibyśmy:

(1) wyznaczyć $\varphi(m)$,
(2) rekurencyjnie obliczyć rozwiązanie mniejszego problemu dla ciągu $a_2, \ldots, a_n$ i modułu $\varphi(m)$, czyli $A_2 = a_{2\uparrow n} \bmod \varphi(m)$,
(3) korzystając z twierdzenia Eulera, wyznaczyć rozwiązanie

$$a_{1\uparrow n} = a_1^{a_{2\uparrow n}} = a_1^{\gamma\cdot\varphi(m) + a_{2\uparrow n} \bmod \varphi(m)} = a_1^{\gamma\cdot\varphi(m)+A_2} \overset{(*)}{\equiv} a_1^{A_2} \pmod m.$$

Przypomnijmy, że jeśli znamy rozkład modułu na czynniki pierwsze $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$, to do obliczenia $\varphi(m)$ możemy wykorzystać następujący wzór:

$$(**) \qquad \varphi(m) = m \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdots \frac{p_\ell - 1}{p_\ell}.$$

Rozkład ten możemy znaleźć w czasie $O(\sqrt{m})$, przeglądając wszystkie potencjalne dzielniki liczby m nie większe niż $\sqrt{m}$. Zatem w takim też czasie wykonamy krok 1 algorytmu. Z kolei potęgowanie $a_1^{A_2} \bmod m$ z kroku 3 możemy wykonać w czasie $O(\log m)$, stosując metodę wielokrotnego podnoszenia do kwadratu. W sumie wykonamy n wywołań rekurencyjnych, w i-tym wywołaniu obliczając $A_i = a_{i\uparrow n} \bmod m_i$, gdzie $m_1 = m$ oraz $m_i = \varphi(m_{i-1})$ dla $i \geqslant 2$, co da algorytm o złożoności czasowej $O(n\sqrt{m})$.

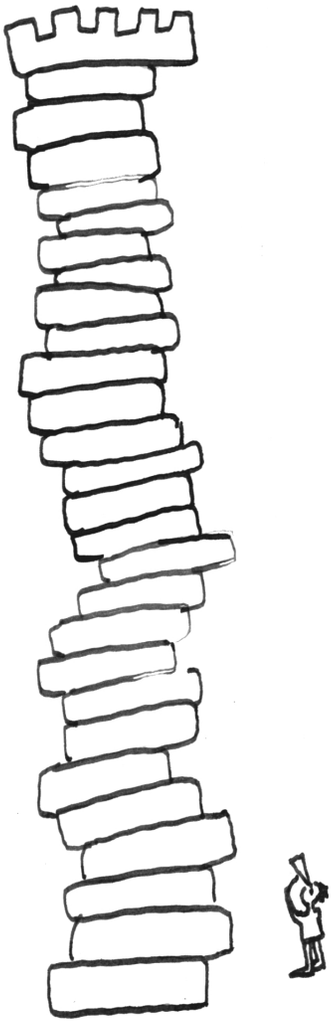
Zauważmy jednak, że ze wzoru $(**)$ widać, iż $\varphi(x)$ dla nieparzystego x jest liczbą parzystą, natomiast dla parzystego x mamy $\varphi(x) \leqslant \frac{x}{2}$. Wynika z tego, że ciąg kolejnych modułów $m_1, m_2, m_3, \ldots, 1$ ma co najwyżej $2\log_2 m$ wyrazów, zatem wystarczy, że wykonamy $\min(n, 2\log_2 m)$ wywołań rekurencyjnych. A po drugie, pracę wykonaną we wszystkich wywołaniach kroku 1 można sumarycznie oszacować przez $O(\sqrt{m})$. Zatem lepszym oszacowaniem czasu działania naszego algorytmu jest $O(\sqrt{m} + \min(n, \log m)\log m)$, czyli po prostu $O(\sqrt{m})$.

Niestety, abyśmy mieli pewność, że algorytm działa poprawnie, nie tylko liczby a_1 i m muszą być względnie pierwsze, ale również liczby a_i i m_i dla wszystkich $i \geqslant 2$. Na szczęście twierdzenie Eulera można uogólnić, aby działało również bez założenia o względnej pierwszości. Nowa wersja brzmi następująco: dla dowolnych liczb naturalnych a, m i k spełniona jest kongruencja

$$(***) \qquad a^{s+k\cdot\varphi(m)} \equiv a^s \pmod m,$$

gdzie s jest pewną liczbą zależną od m, jednak nie większą niż $\log_2 m$.

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zobaczmy, jak dzięki niemu naprawić nasz algorytm. Zmodyfikujemy go tak, aby nie tylko obliczał wartości A_i, ale również dodatkowy bit e_i równy 1 wtedy, gdy $a_{i\uparrow n} \geqslant m_i$. Znowu pokażemy, jak wykonać krok (2) algorytmu: załóżmy zatem, że $m \geqslant 2$ i obliczyliśmy już A_2 oraz e_2.



Rozwiązanie zadania M 1484.
Dla $m = 0$ otrzymujemy $x = -2$, co nie spełnia warunków zadania.

W przeciwnym przypadku otrzymujemy równanie kwadratowe, niech x_1 i x_2 będą jego rozwiązaniami. Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(x_1+2)(x_2+2) &= \\ &= x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = \\ &= \frac{9m+2}{m} + \frac{-2+8m}{m} + 4 = 21.\end{aligned}$$

Ponieważ x_1+2, x_2+2 są liczbami naturalnymi większymi od 1 o iloczynie 21, to są one równe 3 i 7, a stąd rozwiązaniami naszego równania są liczby 1 i 5. Z zależności $9m+2 = 1\cdot 5\cdot m$ mamy $m = -\frac{1}{2}$ i łatwo sprawdzić, że ta wartość parametru faktycznie spełnia warunki zadania.

Wyznaczmy A_1. Jeśli $e_2 = 0$, to $a_{2\uparrow n} < \varphi(m)$, więc $A_2 = a_{2\uparrow n}$ i wystarczy przyjąć $A_1 = a_1^{A_2} \bmod m$. Z kolei jeśli $e_2 = 1$, to $a_{2\uparrow n} \geqslant A_2 + \varphi(m) \geqslant \log_2 m \geqslant s$, czyli

$$a_{1\uparrow n} = a_1^{a_{2\uparrow n}} = a_1^{(\gamma-1)\varphi(m)+A_2+\varphi(m)} \overset{(***)}{\equiv} a_1^{A_2+\varphi(m)} \pmod m.$$

Zatem w obu przypadkach mamy $A_1 = a_1^{A_2+e_2\varphi(m)} \bmod m$. Z kolei wyznaczyć e_1 można następująco: jeśli $a_1 < 2$, to $e_1 = 0$, a w przeciwnym przypadku możemy wykonać potęgowanie $a_1^{A_2+e_2\varphi(m)}$, w każdej iteracji domnażając jedno a_1 i sprawdzając, czy wynik osiągnął już m (wykonamy co najwyżej $\log_2 m$ takich iteracji). Ostatecznie złożoność czasowa całego algorytmu nie zmienia się.

Pozostaje udowodnić dane wzorem $(***)$ uogólnienie twierdzenia Eulera. Zdefiniujmy ciąg d_i następująco:

$$d_0 = \operatorname{nwd}(a, m), \qquad d_i = \operatorname{nwd}\left(a, \frac{m}{d_0 \cdots d_{i-1}}\right) \quad \text{dla } i \geqslant 1,$$

oraz niech s będzie najmniejszą liczbą, taką że $d_s = 1$. Oznaczmy też $D = d_0 \cdots d_{s-1}$.

Liczba m/D jest liczbą powstałą po usunięciu z m wszystkich czynników pierwszych występujących w a, zatem liczby a i m/D są względnie pierwsze. Z twierdzenia Eulera wynika zatem, że

$$a^{k\cdot\varphi(m/D)} \equiv 1 \pmod{m/D}.$$

Ponadto każda z liczb a/d_i jest całkowita, więc liczba a^s/D również. Mnożąc powyższe równanie przez a^s/D, dostajemy

$$a^{s+k\cdot\varphi(m/D)}/D \equiv a^s/D \pmod{m/D}.$$

Korzystając z faktu, że kongruencja $x \equiv y \pmod w$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest $xD \equiv yD \pmod{wD}$, możemy przemnożyć przez D obie strony i moduł powyższego równania:

$$a^{s+k\cdot\varphi(m/D)} \equiv a^s \pmod m.$$

Liczby D i m/D są względnie pierwsze, zatem z multiplikatywności funkcji φ dostajemy $\varphi(m) = \varphi(m/D)\varphi(D)$. Ponadto wykładniki w rozkładach na czynniki pierwsze liczb $m/(d_0 \cdots d_{i-1})$ zmniejszają się, więc $s \leqslant \log_2 m$. Zatem ostatecznie dostajemy tezę twierdzenia:

$$a^{s+k\cdot\varphi(m)} \equiv a^s \pmod m.$$

Tomasz IDZIASZEK

Odwracamy, obracamy...

Dana jest n-elementowa tablica $a[1\,..\,n]$, którą chcemy odwrócić, czyli spowodować, że jej elementy będą zapisane w kolejności $a[n], a[n-1], \ldots, a[1]$. Najłatwiej to zrobić *w miejscu* (czyli używając jedynie stałej liczby komórek pamięci dla zmiennych pomocniczych), korzystając z instrukcji $\operatorname{swap}(a[i], a[j])$ zamieniającej miejscami wartości dwóch elementów:

for $i := 1$ **to** $\lfloor n/2 \rfloor$ **do**
    $\operatorname{swap}(a[i],\ a[n+1-i])$;

Nietrudno się przekonać, że powyższy kod wywołuje instrukcję zamiany jedynie $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ razy, co w przypadku odwrócenia tablicy jest wynikiem optymalnym.

A teraz trudniejsze zadanie: chcemy tę samą tablicę obrócić o k komórek w lewo, czyli ustawić jej elementy w kolejności $a[k+1], a[k+2], \ldots, a[n], a[1], \ldots, a[k]$. I tym razem spróbujmy to zrobić, używając jedynie instrukcji zamiany.

Można w tym celu trzykrotnie wywołać omówioną przed chwilą procedurę odwracania tablicy:

$$\operatorname{rev}(a[1\,..\,k]);\quad \operatorname{rev}(a[k+1\,..\,n]);\quad \operatorname{rev}(a[1\,..\,n]);$$

Ten kod wykona $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ instrukcji zamiany, co w zależności od parzystości liczb n i k da nam n lub $n-1$ instrukcji. Pytanie: czy da się mniej?

Poniższy kod obraca tablicę, dzieląc ją na $\operatorname{nwd}(n,k)$ cykli o długości $n/\operatorname{nwd}(n,k)$ i wykonując obrót każdego z nich niezależnie, do czego potrzebuje $n/\operatorname{nwd}(n,k) - 1$ instrukcji zamiany:

for $i := 1$ **to** $\operatorname{nwd}(n,k)$ **do**
    for $j := 1$ **to** $n/\operatorname{nwd}(n,k) - 1$ **do**
        $\operatorname{swap}(a[i +_n (j-1)\cdot k],\ a[i +_n j \cdot k])$;

Operacja $i +_n j$ oznacza tu $(i + j - 1) \bmod n + 1$. Zatem w tym rozwiązaniu użyjemy w sumie $n - \operatorname{nwd}(n,k)$ instrukcji zamiany. A czy ten wynik da się poprawić?

T.I.