Czegóż to dawniej uczono na wykładach algebry

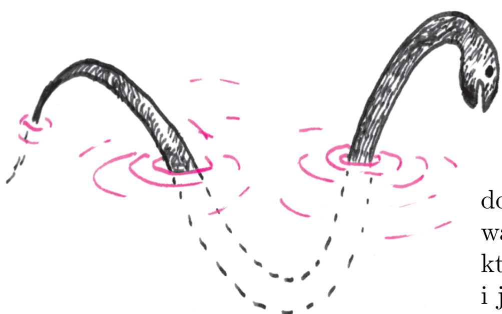
Twierdzenie Sturma

W czasach przedkomputerowych zlokalizowanie pierwiastków wielomianu było cenną umiejętnością. Dziś robią to za nas usłużne komputery.

Rozważamy wielomian w o współczynnikach rzeczywistych stopnia n. Wiadomo, że wielomian taki ma n pierwiastków zespolonych; niektóre z nich (czasami wszystkie) są, być może, rzeczywiste. Twierdzenie Sturma pozwala obliczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu w należących do wybranego przedziału $\langle a, b\rangle$. Oczywiście, odpowiedź na to pytanie możemy uzyskać, stosując metodę badania funkcji wielomianowej w, znaną z analizy matematycznej. Metoda Sturma jest czysto algebraiczna, nie stosuje metod analizy matematycznej.

Sprecyzujmy założenia. Wielomian w o współczynnikach rzeczywistych nie ma pierwiastków wielokrotnych (gdyby miał, to możemy je usunąć opisaną w *Delcie* 12/2015 metodą) oraz dla ustalonych liczb a, b ($a < b$) wartości $w(a)$ i $w(b)$ są różne od zera.

Ciągiem Sturma dla wielomianu w nazywamy ciąg wielomianów $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_s$ określony przez algorytm Euklidesa dla wielomianu w i jego pochodnej w', zmodyfikowany w ten sposób, że rozważamy kolejne reszty z dzielenia zaopatrzone w znak minus:



$$\begin{aligned}
&w_0 := w,\\
&w_1 := w',\\
&w_2: \quad w_0 = q_1 w_1 - w_2,\\
&w_3: \quad w_1 = q_2 w_2 - w_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&w_s: \quad w_{s-2} = q_{s-1} w_{s-1} - w_s
\end{aligned}$$

dotąd aż wielomian w_s nie będzie miał pierwiastków w przedziale $\langle a, b\rangle$. Ten warunek na pewno możemy spełnić, gdyż zmodyfikowany algorytm Euklidesa, który tu stosujemy, prowadzi do największego wspólnego dzielnika wielomianu w i jego pochodnej, a gdyby ten miał pierwiastek, to byłby to wspólny pierwiastek w i w', czyli pierwiastek wielokrotny wielomianu w, wbrew założeniu, że nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Dla x należącego do $\langle a, b\rangle$ przez $z(x)$ oznaczamy liczbę zmian znaku w ciągu $w_0(x), w_1(x), w_2(x), \ldots, w_s(x)$, tj. liczbę takich sytuacji, gdy kolejne wyrazy są liczbami przeciwnych znaków, a jeśli któryś wyraz jest zerowy, to pomijamy go i porównujemy znaki pozostałych wyrazów sąsiednich.

Twierdzenie Sturma. *Liczba pierwiastków rzeczywistych wielomianu w spełniającego sformułowane wyżej założenia w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest równa $z(a) - z(b)$.*

Dowód. Dwa kolejne wielomiany ciągu Sturma nie mogą mieć wspólnego miejsca zerowego w przedziale $\langle a, b\rangle$, gdyby bowiem $w_k(x_0) = w_{k+1}(x_0) = 0$, to wobec równości

$$w_k = q_{k+1} w_{k+1} - w_{k+2}$$

mielibyśmy $w_{k+2}(x_0) = 0$ i kolejne wielomiany ciągu Sturma aż do w_s zerowałyby się w punkcie x_0, co nie jest możliwe.

Wszystkie wielomiany ciągu Sturma mają skończoną liczbę miejsc zerowych, możemy więc dany przedział $\langle a, b\rangle$ podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których każdy z wielomianów ma stały znak. Funkcja z jest stała w każdym z tych podprzedziałów i może zmieniać swą wartość tylko przy przejściu przez punkt, w którym zeruje się jeden z wielomianów ciągu Sturma.

Jeśli x_0 jest miejscem zerowym wielomianu w_k dla $0 < k < s$, to ponieważ

$$w_{k-1} = q_k \cdot w_k - w_{k+1},$$

więc liczby $w_{k-1}(x_0), w_{k+1}(x_0)$ mają przeciwne znaki. W pobliżu punktu x_0 na lewo i na prawo możliwe są następujące układy znaków liczb $w_{k-1}(x), w_k(x), w_{k+1}(x)$:

$$--+,\ -++,\ +--,\ ++-$$

a w samym punkcie x_0:

$$-0+,\ +0-.$$

Rozwiązanie zadania M 1485. Rozważmy następujące doświadczenie losowe: rzucamy niesymetryczną monetą tak długo, aż wyrzucimy orła po raz $(k+1)$-szy. W pojedynczym rzucie prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe $\frac{2}{3}$. Z prawdopodobieństwem 1 takie doświadczenie zakończy się po skończonej liczbie rzutów. Z drugiej strony prawdopodobieństwo zakończenia doświadczenia po dokładnie $n+1$ rzutach wynosi

$$\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{3^{n+1}}.$$

W takim razie

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2^{k+1}}\cdot\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{3^{n+1}} = \frac{3}{2^{k+1}}.$$

W każdym przypadku mamy tylko jedną zmianę znaku. Jeśli więc x_0 nie jest miejscem zerowym wielomianu w, to przy przejściu przez x_0 funkcja z nie zmienia swej wartości. Jeśli natomiast x_0 jest miejscem zerowym wielomianu w, to

$$w(x) = (x - x_0) \cdot v(x), \qquad v(x_0) \neq 0,$$
$$w'(x) = w_1(x) = v(x) + (x - x_0) \cdot v'(x).$$

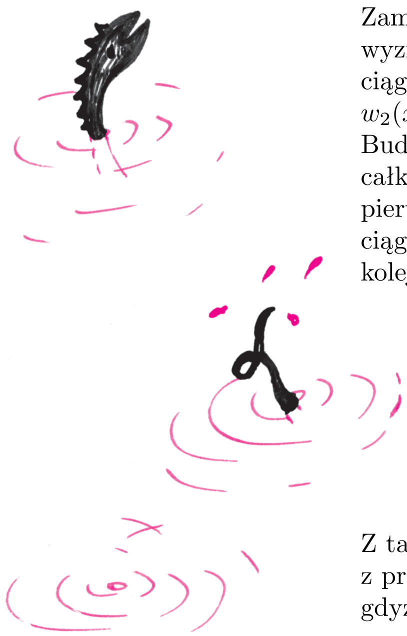
Ponieważ $v(x_0) \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu x_0 funkcja v ma stały znak. Gdy $x < x_0$, funkcja w ma przeciwny znak niż v, gdy zaś $x > x_0$, funkcje w i v mają ten sam znak. Zatem funkcja z przy przejściu przez x_0 zmniejsza swą wartość o 1. Liczba pierwiastków rzeczywistych wielomianu w leżących w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest istotnie równa $z(a) - z(b)$.

Przykład 1. Wyznaczymy liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu $w(x) = x^3 - 3x - 1$ i wskażemy takie przedziały o końcach w liczbach całkowitych, z których każdy zawiera tylko jeden z tych pierwiastków.

Zamiast pochodnej $w'(x) = 3x^2 - 3$ możemy przyjąć $w_1(x) = x^2 - 1$, gdyż przy wyznaczaniu liczby zmian znaku ważne są tylko znaki wartości wielomianów ciągu Sturma. Obliczamy $x^3 - 3x - 1 = x \cdot (x^2 - 1) - 2x - 1$, więc przyjmujemy $w_2(x) = 2x + 1$, a ponieważ $x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)(2x + 1) - \frac{3}{4}$, więc $w_3(x) = \frac{3}{4}$. Budujemy tabelkę, w której pierwszym wierszu wypisujemy wybrane liczby całkowite – będą one końcami przedziałów, w których spodziewamy się pierwiastków wielomianu w, a w pierwszej kolumnie wypisujemy wielomiany ciągu Sturma. Pod każdą liczbą z pierwszego wiersza wypisujemy znaki kolejnych wielomianów, a niżej liczbę zmian znaku.

	-2	-1	0	2
$x^3 - 3x - 1$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$
$2x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{3}{4}$	$+$	$+$	$+$	$+$
Liczba zmian	3	2	1	0

Z tabeli odczytujemy, że po jednym pierwiastku wielomianu w zawiera każdy z przedziałów $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$. Są to oczywiście wszystkie pierwiastki, gdyż wielomian stopnia trzeciego nie ma więcej niż trzy pierwiastki.



Przykład 2. Rozważmy teraz wielomian $w(x) = x^3 + 3x - 5$. Jako $w_1(x)$ możemy przyjąć $x^2 + 1$. Ponieważ $x^3 + 3x - 5 = x \cdot (x^2 + 1) + 2x - 5$, więc przyjmujemy $w_2(x) = -2x + 5$. Następnie obliczamy $x^2 + 1 = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) \cdot (-2x + 5) + \frac{29}{4}$; zatem $w_3(x) = -\frac{29}{4}$. Budujemy tabelkę podobną, jak w poprzednim przykładzie, ale zaczniemy od wyznaczenia znaków granic wielomianów ciągu Sturma w $-\infty$ i $+\infty$.

	$-\infty$		$+\infty$
$x^3 + 3x - 5$	$-$		$+$
$x^2 + 1$	$+$		$+$
$-2x + 5$	$+$		$-$
$-\frac{29}{4}$	$-$		$-$
	2		1

Wynika stąd, że wielomian w ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Obliczmy liczbę zmian znaku na końcach przedziału $\langle 1, 2\rangle$.

	1	2	$+\infty$
$x^3 + 3x - 5$	$-$	$+$	$+$
$x^2 + 1$	$+$	$+$	$+$
$-2x + 5$	$+$	$+$	$-$
$-\frac{29}{4}$	$-$	$-$	$-$
	2	1	1

Jedyny pierwiastek wielomianu w należy do przedziału $\langle 1, 2\rangle$.

Maciej BRYŃSKI

Rozwiązanie zadania F 898.
Kulka może trafić do krawędzi B po jednym lub większej liczbie odbić od dna i towarzyszących im ewentualnie odbiciach od ścianek studni. Jeżeli nastąpiło n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) odbić od dna, to kulka znajdzie się na wysokości H od dna studni po czasie

$$t_n = 2n\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

W tym momencie kulka powinna się znaleźć przy prawej ściance studni. Oznacza to, że droga, przebyta przez nią w kierunku poziomym $S_k = (2k + 1)L$, gdzie $2k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) jest liczbą uderzeń kulki o pionowe ścianki studni. Stąd otrzymujemy, że prędkość kulki w punkcie A powinna być równa:

$$v = \frac{S_k}{t_n} = \frac{2k + 1}{2n} L\sqrt{\frac{g}{2H}}.$$