Z armaty do muchy

Joanna JASZUŃSKA

Poniższe zadania łączy to, że do rozwiązania każdego z nich można użyć pewnego Bardzo Znanego Twierdzenia, udowodnionego całkiem niedawno. Oczywiście to, że *można* strzelać z armaty do muchy nie oznacza, że zawsze *trzeba*...

n i k wszędzie oznaczają dodatnie liczby całkowite.

1. Udowodnij, że dla $n > 2$ liczba $\sqrt[n]{2}$ jest niewymierna.

2. Wykaż, że 56 nie jest trzecią potęgą liczby naturalnej.

3. W dwóch urnach jest po k kul, każda z kul jest biała lub czarna. Z każdej z urn n-krotnie losujemy kulę ze zwracaniem. Dla jakich wartości n, k i dla jakiego układu kolorów kul prawdopodobieństwo wylosowania samych białych kul z pierwszej urny jest równe prawdopodobieństwu wylosowania z drugiej urny wszystkich kul jednego koloru?

4. Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych x, y, z, dla których $xy(x^2 + y^2) = 2z^4$.

5. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których $x^3 - 6y^2 = 2$.

6. Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, który nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych, ale jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych?

7. Niech

$$f(x) = \frac{3987}{3987x+1} + \frac{4365}{4365x+1} + \frac{4472}{-4472x+1},$$

a $f^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną f. Czy $f^{(11)}(0) = 0$?

Rozwiązania

Dowód powstał dopiero pod koniec XX w. Jest zbyt długi i skomplikowany, by zmieścić się na tym marginesie.

Słynne *Wielkie Twierdzenie Fermata* (*WTwF*) z XVII w. głosi, że *dla* $n > 2$ *równanie* $x^n + y^n = z^n$ *nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych* x, y, z. Łatwo je uogólnić dla liczb wymiernych $x, y, z \neq 0$; proszę spróbować!

Więcej o WTwF znaleźć można w tym numerze *Delty* na stronach 4–7.

R1. Załóżmy, że $\sqrt[n]{2} = p/q$, gdzie $0 < p, q \in \mathbb{N}$. Wtedy $2 = p^n/q^n$, zatem $2q^n = p^n$, czyli $q^n + q^n = p^n$, sprzecznie z WTwF. $\square$

R2. Gdyby $56 = n^3$, to $n^3 = 56 = 64 - 8 = 4^3 - 2^3$, czyli $n^3 + 2^3 = 4^3$, sprzecznie z WTwF. $\square$

R3. Niech b_1 i b_2 oznaczają liczby białych kul odpowiednio w pierwszej i drugiej urnie. Prawdopodobieństwo, że z pierwszej urny n-krotnie wylosowano białą kulę równe jest $(b_1/k)^n$. Podobnie wyznaczamy odpowiednie prawdopodobieństwa dla drugiej urny i równość z treści zadania przybiera postać $(b_1/k)^n = (b_2/k)^n + ((k - b_2)/k)^n$, czyli $b_1^n = b_2^n + (k - b_2)^n$.

Jeśli $n > 2$, to z WTwF musi być $b_1 = b_2$ i $k - b_2 = 0$ lub $b_1 = k - b_2$ i $b_2 = 0$. To prowadzi do rozwiązań $b_1 = b_2 = k$ lub $b_1 = k$ i $b_2 = 0$.

Jeśli $n = 2$, równanie spełniają wszystkie trójki pitagorejskie i dla każdej z nich są dwa rozwiązania.

Jeśli $n = 1$, to prawdopodobieństwo, że wszystkie kule wylosowane z drugiej urny są jednego koloru jest równe 1, więc rozwiązaniem jest $b_1 = k$. $\square$

R4. Dany warunek równoważny jest równości $(x + y)^4 = (x - y)^4 + (2z)^4$. Na mocy WTwF, skoro $x, y, z > 0$, oznacza to, że $x - y = 0$, czyli $x = y$. Wówczas $(2x)^4 = (2z)^4$ i w rezultacie $x = y = z$. $\square$

R5. Przekształcając dane równanie, uzyskujemy $x^3 = 6y^2 + 2 = (1 + y)^3 + (1 - y)^3$. Na mocy WTwF musi być $x = 0$, $1 + y = 0$ lub $1 - y = 0$. To daje rozwiązania $(x, y) = (2, -1)$ lub $(x, y) = (2, 1)$. $\square$

R6. Tak. Niech $W(x) = x^{18} - 8x^9$. Wówczas $W(0) = W(\sqrt[9]{2})$. Przypuśćmy, że $W(r) = W(s)$ dla pewnych liczb wymiernych $r \neq s$. Równanie $x^{18} - 8x^9 - W(r) = 0$ ma wtedy dwa różne pierwiastki wymierne r, s. Stąd także równanie $y^2 - 8y - W(r) = 0$ ma dwa różne pierwiastki wymierne r^9, s^9. Wobec tego z wzorów Viète'a $r^9 + s^9 = 8$, czyli $(r^3)^3 + (s^3)^3 = 2^3$.

Z WTwF dla liczb wymiernych r^3, s^3 znaczy to, że $r^3 = 0$ i $s^3 = 2$ lub $s^3 = 0$ i $r^3 = 2$, co na mocy zadania 1 prowadzi do sprzeczności, bo r i s są wymierne. $\square$

R7. Niech

$$g(x) = \frac{a}{ax+1}, \quad \text{wówczas} \quad g^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \left(\frac{a}{ax+1}\right)^{k+1}.$$

Stąd

$$f^{(11)}(x) = -11! \cdot \left(\left(\frac{3987}{3987x+1}\right)^{12} + \left(\frac{4365}{4365x+1}\right)^{12} - \left(\frac{-4472}{-4472x+1}\right)^{12}\right),$$

czyli warunek $f^{(11)}(0) = 0$ równoważny jest warunkowi $3987^{12} + 4365^{12} - 4472^{12} = 0$. To zaś jest niemożliwe na mocy WTwF. $\square$

Zadanie 6 pochodzi z LXIV Olimpiady Matematycznej, a opisane tu rozwiązanie przedstawił jej uczestnik.