Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

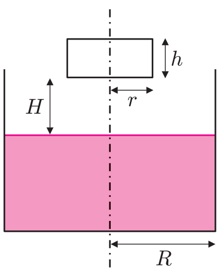
Zadania z fizyki nr 610, 611

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

610. Mokre koło o promieniu R obraca się ruchem jednostajnym w płaszczyźnie pionowej wokół nieruchomej osi. Prędkość punktów na obwodzie koła wynosi v. Znaleźć granicę obszaru suchego.

611. Do naczynia w kształcie walca o promieniu R, częściowo wypełnionego cieczą, wpada klocek w kształcie walca o promieniu r i wysokości h (rys. 1). W chwili początkowej odległość dolnej powierzchni klocka od powierzchni cieczy wynosi H, a jego prędkość jest równa zeru. Ile ciepła wydzieli się do chwili, gdy ustanie ruch klocka i cieczy? Gęstość klocka wynosi ρ, gęstość cieczy $\rho_c > \rho$.

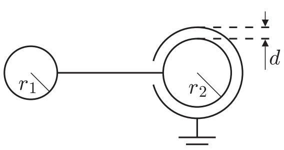


Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 9/2015

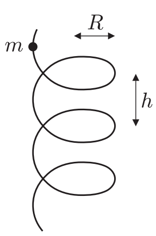
Przypominamy treść zadań:

602. Dwie przewodzące kule o promieniach r_1 i r_2, połączone przewodzącym drutem, znajdują się w dużej odległości od siebie. Kula o promieniu r_2 otoczona jest uziemioną sferą przewodzącą z małym otworkiem (rys. 2). Odległość sfery od kuli wynosi d i jest dużo mniejsza od promienia kuli. Kule naładowano ładunkiem Q. Wyznacz rozmieszczenie ładunku na kulach.



Rys. 2

603. Po ustawionej pionowo sztywnej spirali zsuwa się z zerową prędkością początkową mały koralik o masie m. Promień spirali wynosi R, skok spirali (odległość między sąsiednimi zwojami) wynosi h (rys. 3). Znaleźć wartość przyspieszenia koralika na końcu n-tego zwoju. Tarcie zaniedbać.



Rys. 3

602. Oznaczmy ładunki na kulach o promieniach r_1 i r_2 odpowiednio przez q_1 i q_2. Zachodzi związek

$$Q = q_1 + q_2. \tag{1}$$

Kule połączone drutem tworzą jeden przewodnik, więc ich potencjały są jednakowe:

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} + \frac{q}{r_2 + d}, \tag{2}$$

gdzie q jest ładunkiem indukowanym na uziemionej sferze. Potencjał sfery jest równy zeru:

$$\frac{q}{r_2 + d} + \frac{q_2}{r_2 + d} = 0.$$

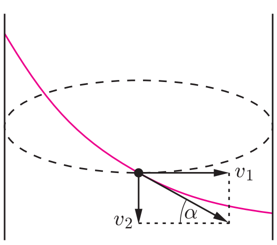
Stąd mamy $q = -q_2$. Podstawiając to do (2) i uwzględniając warunek $d \ll r_2$, otrzymujemy związek:

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_2}{r_2 + d}.$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy:

$$q_1 = \frac{Q r_1 d}{r_2 d + r_2^2}.$$

603. Ruch koralika jest złożeniem ruchu po okręgu o promieniu R i ruchu w kierunku pionowym. Prędkość koralika v w danej chwili można rozłożyć na składowe – poziomą $v_1 = v\cos\alpha$ i pionową $v_2 = v\sin\alpha$, gdzie α jest kątem, jaki tworzy z poziomem styczna do spirali (rys. 4). Przyspieszenie koralika jest sumą wektorową składowej prostopadłej do toru, związanej z ruchem po okręgu, która wynosi



Rys. 4

$$a_n = \frac{v^2\cos^2\alpha}{R},$$

oraz składowej stycznej do toru a_s. Składową styczną można znaleźć, rozwijając myślowo zwój spirali na płaszczyźnie. Otrzymamy wtedy równię pochyłą nachyloną do poziomu pod kątem α, o podstawie $2\pi R$ i wysokości h. Składowa styczna do toru wynosi

$$a_s = \mathrm{g}\sin\alpha = \frac{\mathrm{g}h}{\sqrt{h^2 + 4\pi R^2}}.$$

Prędkość koralika po przebyciu n zwojów otrzymujemy, korzystając z zasady energii mechanicznej: $v^2 = 2\mathrm{g}hn$. Szukana wartość przyspieszenia jest równa

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_s^2} = \frac{\mathrm{g}h\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2 + 64\pi^2n^2R^2}}{h^2 + 4\pi^2R^2}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 594 ($WT = 2{,}65$), 595 ($WT = 4{,}00$), 596 ($WT = 2{,}20$), 597 ($WT = 3{,}25$), 598 ($WT = 3{,}82$), 599 ($WT = 3{,}40$), 600 ($WT = 4{,}00$) i 601 ($WT = 3{,}25$) z numerów 3–6/2015

Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Tomasz Wietecha	Tarnów	29,64
Marian Łupieżowiec	Gliwice	28,11
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Michał Koźlik	Gliwice	26,32
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 703 ($WT = 3{,}00$) i 704 ($WT = 1{,}05$) z numeru 6/2015

Paweł Najman	Kraków	42,85
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jerzy Cisło	Wrocław	35,00
Janusz Fiett	Warszawa	34,33
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77

Zadania z matematyki nr 713, 714

Redaguje Marcin E. KUCZMA

713. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym boki AB i CD nie są równoległe. Rozważamy okrąg, przechodzący przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrąg, przechodzący przez punkty C i D, styczny do prostej AB w punkcie Q. Zakładamy, że punkty P i Q leżą na odcinkach CD i AB oraz że wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez środek odcinka PQ. Udowodnić, że proste AD i BC są równoległe.

714. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej $m \geqslant 1$

(a) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb naturalnych m, n, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$.
(b) Czy istnieje para liczb naturalnych względnie pierwszych $m, n > 1$, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$?

Zadanie 714 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2015

Przypominamy treść zadań:

705. Niech A_0 będzie ustalonym wierzchołkiem $(n{+}1)$-kąta foremnego. Numerujemy pozostałe wierzchołki $A_1, \ldots, A_n$ w dowolnej kolejności. Każdemu bokowi A_iA_j przyporządkowujemy liczbę $|i-j|$. Niech S będzie sumą $n+1$ liczb, przyporządkowanych wszystkim bokom. Dla zadanej liczby naturalnej n:

(a) Obliczyć najmniejszą osiągalną wartość sumy S.
(b) Wyjaśnić, ile jest sposobów ponumerowania n wierzchołków (poza A_0), przy których S osiąga ową minimalną wartość.

706. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, dla których istnieje wielomian W stopnia n, o współczynnikach całkowitych, ze współczynnikiem wiodącym równym 1, i taki, że równanie $W(x)^2 = 1$ ma $2n$ pierwiastków całkowitych (niekoniecznie różnych).

705. (a) Pewien wierzchołek otrzymuje nazwę A_n. Idąc od A_0 do A_n wzdłuż brzegu wielokąta, w wybranym kierunku, mijamy kolejno wierzchołki $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$. Przechodzimy przez A_n, dalej mijamy wierzchołki $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$, i wracamy do A_0. Numery $i_1, \ldots, i_k$ oraz $j_1, \ldots, j_m$ tworzą permutację zbioru $\{1, \ldots, n{-}1\}$. Liczby, przyporządkowane wszystkim bokom, sumują się do wartości

$$S = \big(|0-i_1| + |i_1-i_2| + \ldots + |i_{k-1}-i_k| + |i_k-n|\big) + \\ + \big(|n-j_1| + |j_1-j_2| + \ldots + |j_{m-1}-j_m| + |j_m-0|\big) \geqslant \\ \geqslant n+n = 2n.$$

Równość w tym szacowaniu jest osiągalna; ma ona miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $i_1 < \ldots < i_k$ oraz $j_1 > \ldots > j_m$. Zatem $2n$ to szukane minimum.

(b) Zbiór $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ może być dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, n{-}1\}$ (również pustym, wtedy pierwszy składnik rozpisanej sumy S ma postać $|0-n|$). Zauważmy teraz, że już sam *wybór* zbioru I determinuje ponumerowanie, realizujące równość $S = 2n$; liczby ze zbioru I, uporządkowane rosnąco, trzeba przypisać kolejnym wierzchołkom (przy obieganiu wielokąta od A_0 w wybranym kierunku), następny wierzchołek trzeba nazwać A_n, a dalszym wierzchołkom dać niewykorzystane numery, uporządkowane malejąco.

Konkluzja: jest tyle możliwości optymalnego ponumerowania n wierzchołków, ile podzbiorów ma zbiór $\{1, \ldots, n{-}1\}$, to znaczy 2^{n-1}.

706. Przykładami wielomianów, o jakich mowa, stopni $n = 1$ oraz $n = 2$, mogą być $W(x) = x$ oraz $W(x) = x^2 + x - 1$. Wykażemy, że nie istnieje wielomian o podanych własnościach, stopnia $n \geqslant 3$.

Przypuśćmy, że W jest takim wielomianem. Zestaw wszystkich $2n$ pierwiastków wielomianu $W(x)^2 - 1$ rozdzielamy na ciąg $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ pierwiastków wielomianu $W(x) - 1$ oraz ciąg $\beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$ pierwiastków wielomianu $W(x) + 1$. Wówczas

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i) = \big(W(x)-1\big) - \big(W(x)+1\big) = -2.$$

Podstawiając $x = \beta_n$ mamy $\prod_{i=1}^{n}(\beta_n - \alpha_i) = -2$, skąd wynika, że najmniejszy z czynników tego iloczynu jest liczbą ujemną: $\beta_n - \alpha_n < 0$. Wobec tego α_n jest liczbą większą od wszystkich β_i. Widzimy ponadto, że liczby α_i nie mogą być wszystkie równe, bo liczba -2 nie jest iloczynem n równych liczb całkowitych. Zatem $\alpha_1 < \alpha_n$.

Podstawiając z kolei w równaniu (1) $x = \alpha_n$ dostajemy $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_n - \beta_i) = 2$. Jest to iloczyn dodatnich liczb całkowitych; największa musi być dwójką, a pozostałe jedynkami – to znaczy,

$$(2) \qquad \beta_1 = \alpha_n - 2; \qquad \beta_i = \alpha_n - 1 \quad \text{dla } i = 2, \ldots, n.$$

Wracamy do równania (1) i podstawiamy $x = \alpha_1$; otrzymujemy równość $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_1 - \beta_i) = 2$. Zgodnie ze wzorami (2), przepisujemy ją w postaci

$$(3) \qquad (\alpha_1 - \alpha_n + 2)(\alpha_1 - \alpha_n + 1)^{n-1} = 2.$$

Skoro $n - 1 \geqslant 2$, czynnik $(\alpha_1 - \alpha_n + 1)$ musi być równy ± 1. Gdyby był równy 1, znaczyłoby to, że $\alpha_1 = \alpha_n$, wbrew wcześniejszemu spostrzeżeniu. Gdyby był równy -1, w pierwszym nawiasie wzoru (3) mielibyśmy 0. Równość (3) doprowadziła do sprzeczności.

Wielomiany o postulowanych własnościach istnieją więc tylko dla $n = 1$ i $n = 2$. (Nietrudno znaleźć ich ogólną postać – zostawiamy to jako ćwiczenie).