

Rys. 1

Rozpatrzmy dowolny trójkąt oraz cztery kwadraty zbudowane w sposób przedstawiony na rysunku 1. Wówczas zaznaczone kolorem trzy odcinki, łączące odpowiednie wierzchołki kwadratów oraz środek najniższego kwadratu, przecinają się w jednym punkcie.

Tę ciekawą własność można znaleźć na stronie [www.gogeometry.com/problem/](http://www.gogeometry.com/problem/) w dziale *Open Geometry Problems* (otwarte problemy geometryczne). Jest to zadanie nr 902 opublikowane 15 lipca 2013 r. W tym przypadku „otwarte” nie oznacza, że żaden dowód tej własności nie jest znany. Przy pewnej dozie zamięłowania do rachunków można zweryfikować słuszność tej zależności w układzie współrzędnych. Przez „otwarte” należy więc rozumieć to, że nie jest znany dowód geometryczny. Takie dowody często pozwalają lepiej zrozumieć fenomen danej własności, związku z innymi geometrycznymi konfiguracjami oraz otwierają drogę do ciekawych modyfikacji i uogólnień.

Tak jest i w tym przypadku. Geometryczny dowód prezentowanej własności przedstawię od razu w nieco ogólniejszej sytuacji.

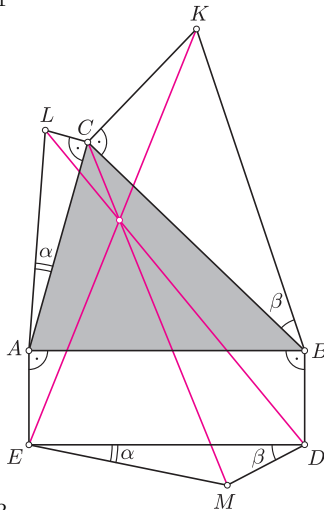
**Twierdzenie 1.** *Rozpatrzmy dowolny trójkąt  $ABC$  oraz prostokąt  $ABDE$  leżący po zewnętrznej stronie tego trójkąta (rys. 2). Po zewnętrznej stronie prostokąta budujemy dowolny trójkąt  $DEM$ . Oznaczamy:*

$$\alpha = \sphericalangle DEM \quad \text{oraz} \quad \beta = \sphericalangle EDM.$$

*Następnie, po zewnętrznej stronie trójkąta  $ABC$  budujemy takie trójkąty  $BCK$  i  $ACL$ , że  $\sphericalangle BCK = \sphericalangle ACL = 90^\circ$ ,*

$$\sphericalangle CAL = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBK = \beta.$$

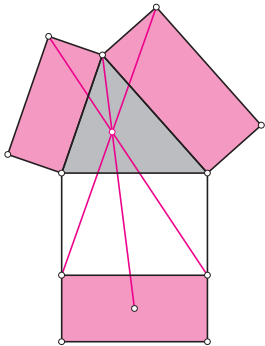
*Wówczas proste  $EK$ ,  $DL$  i  $CM$  przecinają się w jednym punkcie.*



Rys. 2

Własność z rysunku 1 jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia: wystarczy przyjąć, że  $ABDE$  jest kwadratem oraz że  $\alpha = \beta = 45^\circ$ .

Z kolei przypadek  $\alpha = \beta$  daje zaskakujące uogólnienie zależności z rysunku 1: trzy zacieniowane prostokąty na rysunku 3 są podobne, podczas gdy czwarty prostokąt jest dowolny – jego kształt w żaden sposób nie jest związany z pozostałymi prostokątami!



Rys. 3

**Dowód twierdzenia 1.** Oznaczmy przez  $S$  punkt przecięcia prostych  $DL$  i  $KE$  (rys. 4). Chcemy wykazać, że punkty  $C$ ,  $S$  i  $M$  leżą na jednej prostej.

Niech  $P$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $A$  na prostą  $LD$ . Wówczas punkt  $P$  leży na okręgu  $\omega$  opisanym na prostokącie  $ABDE$ . Niech ponadto punkty  $G$  i  $H$  będą drugimi punktami przecięcia odpowiednio prostych  $EM$  i  $DM$  z okręgiem  $\omega$ . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że oba punkty  $G$  i  $H$  leżą na tym łuku  $DE$  okręgu  $\omega$ , który nie zawiera punktów  $A$  i  $B$ . Rozumowanie w pozostałych przypadkach przebiega analogicznie.

Z równości  $\sphericalangle APL = 90^\circ = \sphericalangle ACL$  wynika, że punkty  $A$ ,  $L$ ,  $C$  i  $P$  leżą na jednym okręgu. Wobec tego

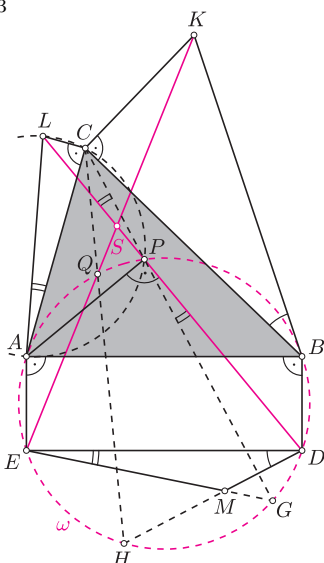
$$\sphericalangle CPL = \sphericalangle CAL = \alpha = \sphericalangle DEM = \sphericalangle GPD,$$

skąd wniosek, że punkty  $C$ ,  $P$  i  $G$  leżą na jednej prostej.

Innymi słowy, wykazaliśmy, że proste  $CG$  i  $DL$  przecinają się w punkcie  $P$  leżącym na okręgu  $\omega$ . Analogicznie wykazujemy, że proste  $CH$  i  $EK$  przecinają się w punkcie  $Q$  leżącym na okręgu  $\omega$ .

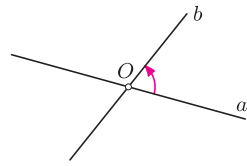
Jeśli punkt  $M$  leży na okręgu  $\omega$ , to  $G = H = M$  i w konsekwencji  $P = Q = S$ . Wobec tego, skoro punkty  $C$ ,  $P$  i  $G$  są współliniowe, to także punkty  $C$ ,  $S$  i  $M$  są współliniowe.

Jeśli z kolei  $M$  nie leży na okręgu  $\omega$ , to stosując twierdzenie Pascala dla sześciokąta  $GPDHQE$ , wnioskujemy, że punkty  $GP \cap HQ = C$ ,  $PD \cap QE = S$  oraz  $DH \cap EG = M$  leżą na jednej prostej. To kończy dowód twierdzenia 1.  $\square$

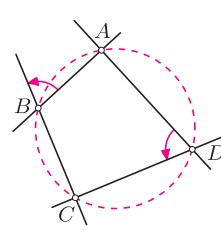


Rys. 4

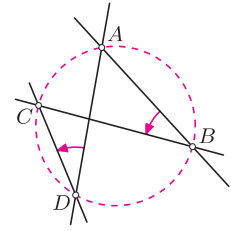
Przedstawione rozumowanie można bez większych kłopotów przenieść na znacznie ogólniejszą konfigurację. Do jej opisu potrzebne będzie nam pojęcie kąta skierowanego między prostymi.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Niech  $a$  i  $b$  będą dowolnymi prostymi przecinającymi się w punkcie  $O$  (rys. 5). *Kątem skierowanym między prostą  $a$  i prostą  $b$  nazywamy kąt, o jaki należy obrócić prostą  $a$  wokół punktu  $O$  (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), aby otrzymać prostą  $b$ . Kąt ten oznaczamy symbolem  $\sphericalangle(a, b)$ .*

Zwróćmy uwagę na to, że wielkość  $\sphericalangle(a, b)$  nie jest zdefiniowana jednoznacznie, a jedynie z dokładnością do  $180^\circ$ . Pisząc zatem „ $\sphericalangle(a, b) = \alpha$ ”, rozumiemy, że kąty stojące po obu stronach tej równości różnią się o pewną całkowitą wielokrotność kąta  $180^\circ$ .

Następujące twierdzenie dobrze ilustruje powód, dla którego wprowadza się pojęcie kąta skierowanego między prostymi (rys. 6): *Różne punkty  $A, B, C, D$  (nieleżące na jednej prostej) leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(AD, DC)$ . Istotą tego sformułowania jest to, że punkty  $A, B, C, D$  mogą być ułożone dowolnie – nie muszą być kolejnymi wierzchołkami czworokąta wypukłego (rys. 7).*

**Twierdzenie 2.** *Rozpatrzmy dowolny trójkąt  $ABC$  oraz okrąg  $\omega$  przechodzący przez punkty  $A$  i  $B$  (rys. 8). Niech  $D$  i  $E$  będą punktami leżącymi na okręgu  $\omega$ , a  $M$  dowolnym punktem. Oznaczmy:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(DE, EA), & \beta &= \sphericalangle(ME, ED), \\ \gamma &= \sphericalangle(BD, DE), & \delta &= \sphericalangle(ED, DM). \end{aligned}$$

*Punkty  $K$  i  $L$  są wyznaczone przez warunki:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(LC, CA), & \beta &= \sphericalangle(CA, AL), \\ \gamma &= \sphericalangle(BC, CK), & \delta &= \sphericalangle(KB, BC). \end{aligned}$$

*Wówczas proste  $EK, DL$  i  $CM$  przecinają się w jednym punkcie (lub są równoległe).*

Dowód twierdzenia 2 przebiega w pełni analogicznie do powyższego rozumowania, z drobną różnicą: punkt  $P$  należy zdefiniować jako drugi punkt przecięcia prostej  $LD$  z okręgiem opisanym na trójkącie  $ACL$ . Dalsza część rozumowania pozostaje bez zmian.

Na koniec przyjrzyjmy się pewnym szczególnym przypadkom twierdzenia 2.

Jeśli przyjmiemy  $\alpha = \gamma$ , to czworokąt  $ABDE$  jest trapezem równoramiennym o podstawach  $AB$  i  $DE$  (rys. 9). Uzyskujemy wtedy zależność, która jest uogólnieniem powszechnie znanej konfiguracji (nazywanej czasami *twierdzeniem Jacobiego*), gdy  $A = E$  i  $B = D$ .

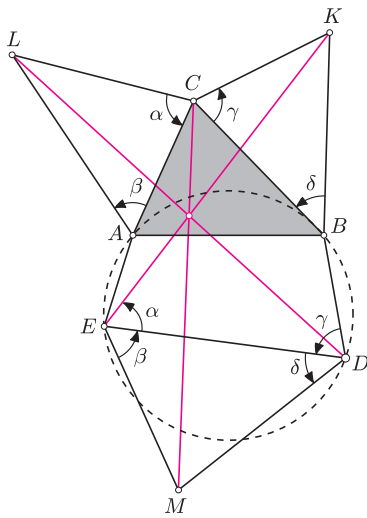
Ciekawy jest przypadek, gdy czworokąt  $ABDE$  degeneruje się do trójkąta, tzn. gdy  $A = E$ . Wtedy prostą  $EA$  należy traktować jako styczną do okręgu opisanego na trójkącie  $ABD$ , jak to ma miejsce w zdegenerowanych przypadkach twierdzenia Pascala. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą uzyskujemy wówczas

$$\alpha = \sphericalangle(DE, EA) = \sphericalangle(DB, BA),$$

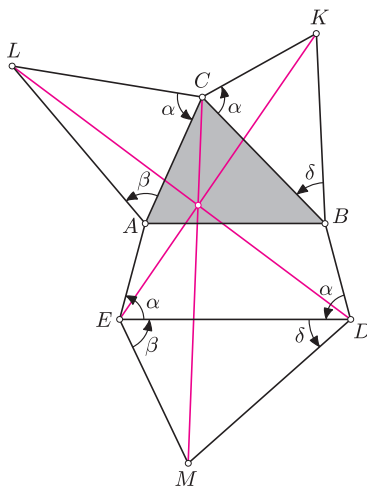
co z pozostałymi równościami twierdzenia 2 daje komplet założeń w tym przypadku (rys. 10).

Dowolność wyboru kątów  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  oraz okręgu  $\omega$  daje swobodę w konstruowaniu wielu ciekawych własności geometrycznych, podobnych do tej z rysunku 1.

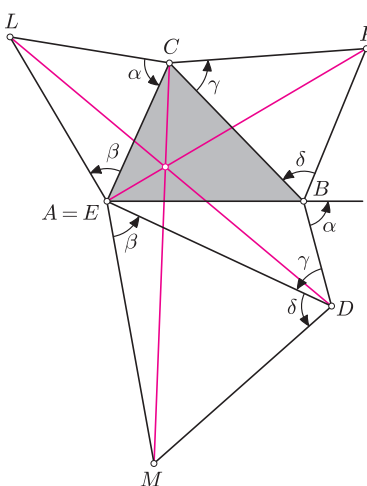
Na okładce znajduje się kilka takich przykładów. Każdy z nich jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 2.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10