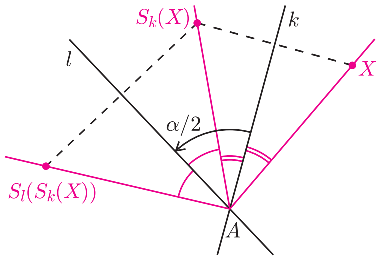
deltoid 84

O obrotach

Joanna JASZUŃSKA

Na płaszczyźnie obrót wokół punktu A o kąt $0° \leqslant \alpha < 360°$ (ozn. R^{α}_{A}) jest złożeniem dwóch symetrii osiowych (rys. 1). Utożsamiamy obroty o $\alpha + 360°$ i o α.



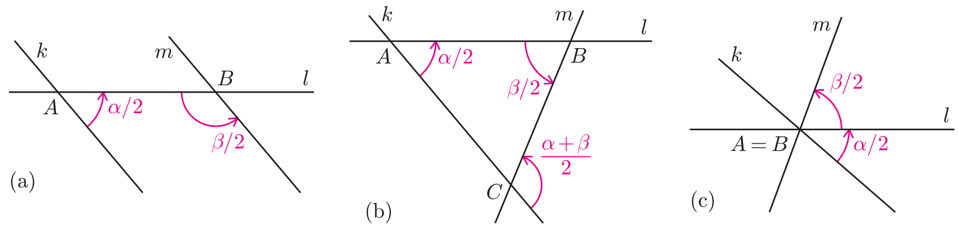
Rys. 1. $R^{\alpha}_{A} = S_l \circ S_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie (najpierw stosujemy przekształcenie z prawej strony), a S_x to symetria względem prostej x.

Składanie przekształceń jest **łączne**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Kąty mierzymy antyzegarowo. We wszystkich rozwiązaniach przyjmujemy taką orientację figur, jaką przedstawiono na rysunkach.

Więcej o składaniu symetrii osiowych przeczytać można w *Delcie* 11/2015.

Fakt (∗). *Dane są kąty* $0° \leqslant \alpha, \beta < 360°$. *Złożenie* $R^{\beta}_{B} \circ R^{\alpha}_{A}$ *jest:*
a) *przesunięciem (być może o wektor zerowy), jeśli* $\alpha + \beta = 0°$ *lub* $\alpha + \beta = 360°$,
b) *obrotem o kąt* $\alpha + \beta$ *w przeciwnym przypadku.*



Rys. 2. Jeśli $k \parallel m$, to $S_m \circ S_k$ jest przesunięciem, a jeśli $k = m$ – identycznością (ozn. Id).

Dowód. W każdym przypadku wybieramy osie symetrii k, l, m jak przedstawiono na rysunku 2 i uzyskujemy $R^{\beta}_{B} \circ R^{\alpha}_{A} = S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_k = S_m \circ S_k$, co w zależności od wzajemnego położenia prostych k i m daje odpowiednie przekształcenia. □

1. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ABK, CDL, BCP i DAQ, pierwsze dwa z nich na zewnątrz czworokąta, pozostałe dwa – do wewnątrz. Wykaż, że $KQ = PL$ oraz $KQ \parallel PL$.

2. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne ABF, BCD, CAE. Skonstruuj trójkąt ABC, mając dane tylko punkty D, E, F.

Fakt (∗∗). *Kąty* $0° < \alpha, \beta, \gamma < 360°$ *dają w sumie* $360°$. *Jeśli różne punkty* A, B, C *spełniają warunek* $R^{\gamma}_{C} \circ R^{\beta}_{B} \circ R^{\alpha}_{A} = \mathrm{Id}$, *to tworzą trójkąt o kątach odpowiednio* $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$.

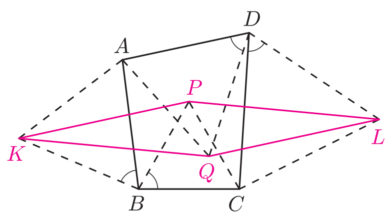
Dowód można odczytać z rysunku 2(b). □

3. Udowodnij twierdzenie Napoleona: *Na bokach trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Wówczas ich środki tworzą trójkąt równoboczny.*

4. Dany jest punkt P_0 i trójkąt ABC. Niech $P_1 = R^{120°}_{A}(P_0)$, $P_2 = R^{120°}_{B}(P_1)$, $P_3 = R^{120°}_{C}(P_2)$, $P_4 = R^{120°}_{A}(P_3)$ itd. Udowodnij, że jeżeli $P_{300} = P_0$, to trójkąt ABC jest równoboczny.

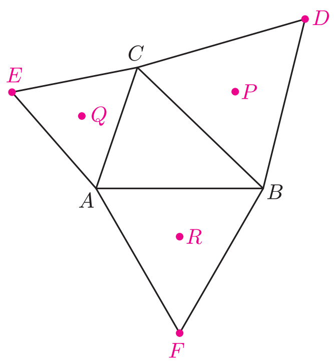
5. Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$ o środkach odpowiednio P i Q są tak samo zorientowane i mają rozłączne wnętrza. Punkty R i S są środkami odpowiednio odcinków BG i DE. Wykaż, że czworokąt $PRQS$ jest kwadratem.

Rozwiązania



Rys. 3. $KQLP$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym).

R1. Niech $f = R^{60°}_{D} \circ R^{300°}_{B}$ (rys. 3). Na mocy (∗) jest to przesunięcie, ponadto $f(K) = R^{60°}_{D}(R^{300°}_{B}(K)) = R^{60°}_{D}(A) = Q$ i analogicznie $f(P) = L$. Oznacza to, że $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{PL}$ (jest to wektor przesunięcia f), co kończy dowód. □



Rys. 4

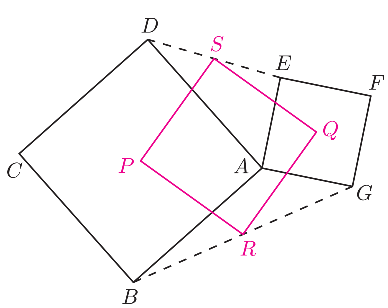
R2. Niech $f = R^{60°}_{F} \circ R^{60°}_{D} \circ R^{60°}_{E}$ (rys. 4). Na mocy (∗) jest to obrót o $180°$. Skoro

$$f(A) = R^{60°}_{F}(R^{60°}_{D}(R^{60°}_{E}(A))) = R^{60°}_{F}(R^{60°}_{D}(C)) = R^{60°}_{F}(B) = A,$$

to A jest punktem stałym (środkiem) tego obrotu, czyli $f = R^{180°}_{A}$.

Rozważmy dowolny punkt X i wyznaczmy $f(X)$. Wówczas otrzymujemy kolejno: A jako środek odcinka o końcach X i $f(X)$, $C = R^{60°}_{E}(A)$, $B = R^{60°}_{D}(C)$. □

R3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4 i niech $f = R^{120°}_{P} \circ R^{120°}_{Q} \circ R^{120°}_{R}$. Na mocy (∗) jest to przesunięcie. Ponieważ $f(B) = B$, to wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \mathrm{Id}$. Zatem na mocy (∗∗) trójkąt PQR jest równoboczny. □



Rys. 5

R4. Niech $f = R^{120°}_{C} \circ R^{120°}_{B} \circ R^{120°}_{A}$. Na mocy (∗) jest to przesunięcie. Z treści zadania wynika, że $f^{100}(P_0) = P_{300} = P_0$, stąd wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \mathrm{Id}$. Wobec tego na mocy (∗∗) trójkąt ABC ma kąty równe $60°$. □

R5. Niech $f = R^{180°}_{R} \circ R^{90°}_{Q} \circ R^{90°}_{P}$ (rys. 5). Na mocy (∗) jest to przesunięcie; $f(B) = B$, więc $f = \mathrm{Id}$. Na mocy (∗∗) trójkąt PQR jest prostokątny i $PR = QR$. Tak samo dowodzimy, że trójkąt PQS jest drugą połową kwadratu $PRQS$. □