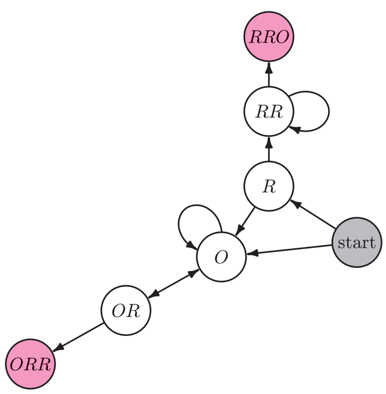
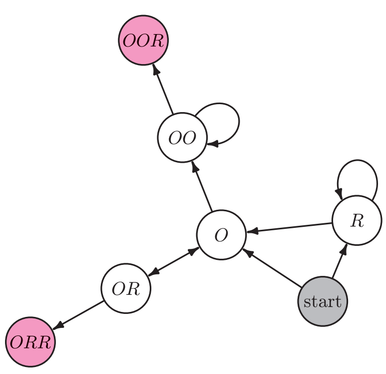
RROzważania O RReszce i ORRle

Łukasz RAJKOWSKI

Zwykła moneta często okazuje się doskonałym narzędziem do rozstrzygania konfliktów. Zapewne każdemu zdarzyło się usłyszeć magiczną formułkę „orzeł to, reszka tamto”, z reguły będąc przychylnym dokładnie jednemu ze zdarzeń „to” lub „tamto”. Takie rozwiązanie jest jednak mało widowiskowe – o ile wzajemne obrzucanie się inwektywami (w celu wytłumaczenia, w jak wielkim błędzie jest strona przeciwna, prezentując zdanie odmienne od naszego) szybko przyciąga publiczność, tak zakończenie sporu przy użyciu jednego rzutu monetą może pozostawić ją z odczuciem niedosytu. Przykładowym sposobem na uatrakcyjnienie oraz niewielkie przedłużenie całej procedury jest rzucanie monetą, dopóki wśród kolejnych wyników nie pojawi się jedna z konfiguracji OO lub RR, w zależności od której wyłaniany jest zwycięzca. Ich oczywista symetria sprawia, że przegrany może czuć się pokrzywdzony jedynie przez los, nie zaś przez oszustne praktyki adwersarza. Co jednak, jeśli osoba typująca OO (nazwijmy ją Jackiem) zmieniła zdanie na OR? Wówczas obstawiający RR (Placek, rzecz jasna) miałby prawo do słusznego protestu; zauważmy bowiem, że jeśli w pierwszym rzucie pojawi się reszka, to szanse Jacka na zwycięstwo wynoszą 50%, jeśli natomiast orzeł, to wygra on z pewnością (w momencie, w którym pojawi sie pierwsza reszka) i dlatego prawdopodobieństwo jego sukcesu należy oceniać na 75%. Podobna sytuacja ma miejsce, jeśli Jacek i Placek będą oczekiwać odpowiednio na konfiguracje ORR i RRO – wbrew pozorom, jakie stwarza równa liczba reszek w obu przypadkach, Jacek jest faworytem również takiej rozgrywki. Wytłumaczenie tego faktu jest analogiczne, jednak odrobinę bardziej skomplikowane, dlatego warto podeprzeć się rysunkiem 1, ilustrującym wszystkie istotne z punktu widzenia rozgrywki „końcówki” ciągu wyników (będziemy je nazywać *stanami*) oraz strzałki prezentujące możliwość bezpośredniego przejścia między stanami (każde z prawdopodobieństwem 50%). Tak jak poprzednio, ciąg rzutów rozpoczynający się od orła nie może skończyć się inaczej niż zwycięstwem Jacka; z kolei gdy zaczniemy od reszki, decydujący jest drugi rzut: reszka prowadzić będzie nieuchronnie do wygranej Placka, natomiast orzeł do Jacka. Wnioskujemy stąd, że ponownie z prawdopodobieństwem 75% ten ostatni okaże się zwycięzcą.



Rys. 1



Rys. 2

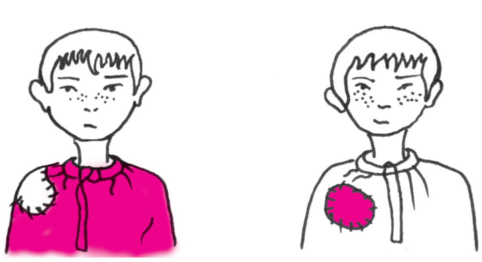
Co zatem może uczynić Placek, by szala zwycięstwa przechyliła się na jego stronę? Okazuje się, że w celu uzyskania przewagi powinien obstawić konfigurację OOR. W konfrontacji z ORR otrzymujemy wówczas stany zilustrowane na rysunku 2. Analiza otrzymanego grafu pozwala szybko przekonać się o przewadze konfiguracji OOR, gdyż aby gra się zakończyła, z pewnością musi przejść przez stan O, z którego – jeśli przejdzie do stanu OO – to z pewnością zakończy się sukcesem Placka, natomiast przejście do OR niekoniecznie skutkować będzie triumfem Jacka. Aby jednak przedstawić prawdopodobieństwa sukcesu graczy, musimy przeprowadzić nieco bardziej skomplikowane obliczenia niż poprzednio. Oznaczmy przez p_s szansę na zwycięstwo Placka, gdy rozpoczynamy ze stanu s. Wówczas oczywiście $p_{OOR} = 1$ oraz $p_{ORR} = 0$, ponadto, korzystając z rysunku 2 oraz zdrowego rozsądku (przyjmującego w tym przypadku uczoną nazwę *wzoru na prawdopodobieństwo całkowite*), możemy przedstawić następujące zależności:

$$(1)\ p_{OO} = \frac{p_{OOR} + p_{OO}}{2}, \quad (2)\ p_{OR} = \frac{p_{ORR} + p_{O}}{2}, \quad (3)\ p_{O} = \frac{p_{OO} + p_{OR}}{2},$$

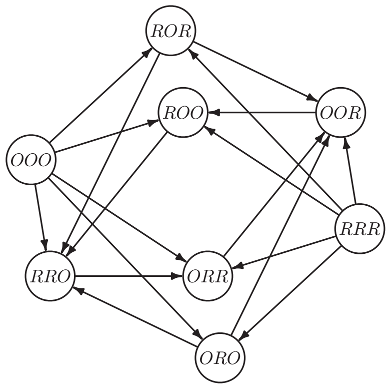
$$(4)\ p_{R} = \frac{p_{O} + p_{R}}{2}, \quad (5)\ p_{\text{start}} = \frac{p_{O} + p_{R}}{2}$$

Z równania (1) dostajemy $p_{OO} = p_{OOR} = 1$, skąd oraz z układu równań (2) i (3) mamy $p_O = 1 - p_{OR} = \frac{2}{3}$. Z (4) wnioskujemy $p_O = p_R$, dlatego z równania (5) mamy $p_{\text{start}} = p_O = \frac{2}{3}$ – jest to zatem szukane prawdopodobieństwo wygranej Placka na samym początku rozgrywki.

Dążący do odzyskania przewagi nad swoim konkurentem Jacek może teraz przeprowadzić następujące rozumowanie: „skoro, obstawiając ORR, miałem przewagę nad celującym w RRO Plackiem, to jeśli teraz Placek wytypował OOR, z symetrii sytuacji wystarczy mi zmienić swój wybór na ROO!”. W odpowiedzi na takie posunięcie Placek może pomyśleć: „kiedy Jacek grał ORR, spuszczałem mu łomot, obstawiając OOR, więc jeśli teraz wytypował ROO, utrzymam moją przewagę, czekając na RRO!”. W tym miejscu artykułu Czytelnik, który nie zagubił się jeszcze w gąszczu e*R*ów i *O*ów, zwrócił być może uwagę na pewien niepokojący efekt całego rozumowania. Uzasadniliśmy bowiem, że grający RRO zapewne przegra z typującym ORR, który powinien przegrać z obstawiającym OOR, który prawdopodobnie ustąpi pola grającemu ROO, a ten ostatni zapewne poniesie klęskę, grając z... pierwszym, czyli RRO! Oczywiście, sprzeczność jest



jedynie pozorna, a podobnego typu paradoksów probabilistycznych nie brakuje – o jednym z nich (kościach Sichermana) można przeczytać w *Delcie* 1/2009. Czy możemy wskazać inne ciągi konfiguracji długości 3 o opisanej własności? Aby odpowiedzieć na to pytanie, użyjemy mało finezyjnego sposobu: dla każdych dwóch takich konfiguracji sprawdzimy bowiem, przy użyciu opisanej wcześniej metody, która z nich (o ile którakolwiek) miałaby większe szanse na wygraną w przypadku konfrontacji. Efekt takiej analizy przedstawiony jest na rysunku 3, na którym strzałka między dwiema konfiguracjami wskazuje na prawdopodobnego zwycięzcę, jej brak natomiast oznacza równe szanse w pojedynku. Zwróćmy uwagę, że konfiguracje OOO i RRR nie wygrywają z żadną inną, nie mogą być zatem częścią żadnego cyklu. Wynika stąd, że do cyklu nie mogą również należeć ORO i ROR, gdyż jedyne, z jakimi wygrywają, to wykluczone wcześniej OOO i RRR. Z pozostałych konfiguracji można ułożyć wyłącznie cykl opisany wcześniej i dlatego jest on jedyny możliwy do uzyskania. Warto ponadto zauważyć, że z każdego wierzchołka prezentowanego grafu wychodzi strzałka – oznacza to, że dla każdej konfiguracji przeciwnika możemy znaleźć taką, która prawdopodobnie da nam zwycięstwo. Niestety, on może odpłacić się nam tym samym, i choć przez pewien czas moglibyśmy bawić się w złośliwe zmiany decyzji, patową sytuację zapewne najwygodniej będzie zakończyć przy użyciu starego i sprawdzonego pojedynczego rzutu monetą.



Rys. 3

Zadania

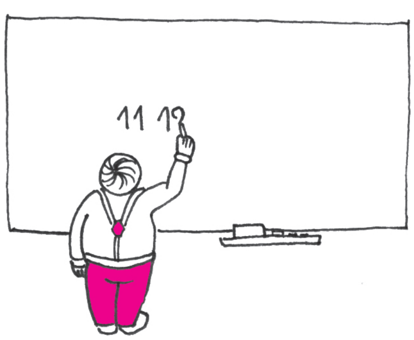
Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1474. Wykazać, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 jest zawarty w pewnym prostokącie o polu 2.
Rozwiązanie na str. 14

M 1475. Niech ϕ będzie funkcją *różnowartościową* odwzorowującą zbiór liczb całkowitych dodatnich w siebie. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

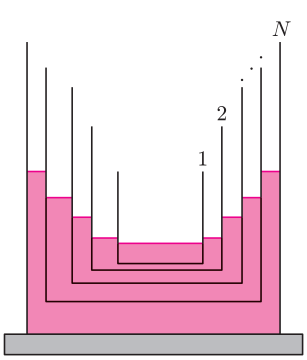
Rozwiązanie na str. 3



M 1476. Na tablicy napisano liczby $11, 12, 13$. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb napisanych na tablicy (oznaczamy ją przez c) i zastąpieniu jej liczbą $2a + 2b - c$, gdzie a i b to dwie pozostałe liczby. Rozstrzygnąć, czy za pomocą takich ruchów możemy uzyskać na tablicy trójkę liczb $20, 21, 24$? A trójkę $20, 21, 23$?
Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Michał NAWROCKI

F 891. Na satelitę o masie m poruszającego się z prędkością v po orbicie kołowej w pobliżu powierzchni Ziemi działa stała siła hamująca F. Znając przyspieszenie ziemskie g znaleźć prędkość v_z zniżania się satelity, przyjmując, że zmiana jego orbity zachodzi dostatecznie wolno.
Rozwiązanie na str. 12



F 892. N cylindrycznych naczyń o masach $m, 2m, \ldots, Nm$ i przekrojach poprzecznych $S, 2S, \ldots, NS$ umieszczono jedno w drugim jak na rysunku. Do naczyń nalano tyle wody, że każde z nich pływa w większym naczyniu nie dotykając jego dna i ścianek. Największe naczynie stoi na stole. Do jakiej wysokości, w stosunku do powierzchni stołu, jest napełnione największe naczynie? Całkowita masa wody wynosi M, a jej gęstość wynosi ρ. Ścianki naczyń uznać za zaniedbywalnie cienkie.
Rozwiązanie na str. 21