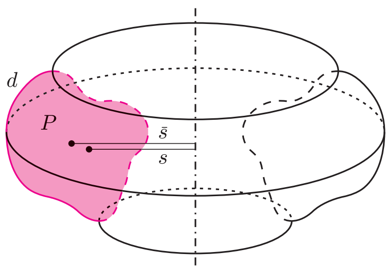
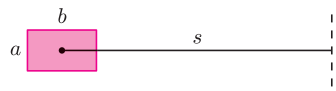
O obrotach figur płaskich

W 1641 roku ukazały się *Centrobaryca* Paula Guldina, a w nich twierdzenie znane dziś jako **reguły Guldina**. Oto ono.



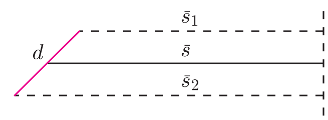
Jeśli figurę płaską $\mathcal{F}$ o polu P i obwodzie d będziemy obracali wokół osi niemającej punktów wspólnych z wnętrzem $\mathcal{F}$ i leżącej w tej samej co ona płaszczyźnie, to powstała bryła będzie miała objętość $2\pi sP$ i pole powierzchni $2\pi\bar{s}d$, gdzie s i $\bar{s}$ to, odpowiednio, odległość środka ciężkości pola i środka ciężkości brzegu $\mathcal{F}$ od osi.

Guldin uzasadnił je, sprawdzając, że z objętością tak jest, gdy obracamy prostokąt o boku równoległym do osi obrotu, a z polem powierzchni – gdy obracamy odcinek.



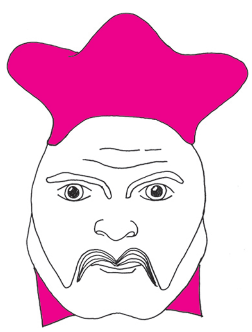
Z obracania prostokąta otrzymamy walec o promieniu $s + b/2$ z wyciętym walcem o promieniu $s - b/2$, czyli bryłę o objętości

$$\pi a(s + b/2)^2 - \pi a(s - b/2)^2 = \\ = \pi a(s + b/2 + s - b/2)(s + b/2 - s + b/2) = 2\pi sab.$$



Z obracania odcinka otrzymamy stożek ścięty (lub walec) o polu powierzchni bocznej

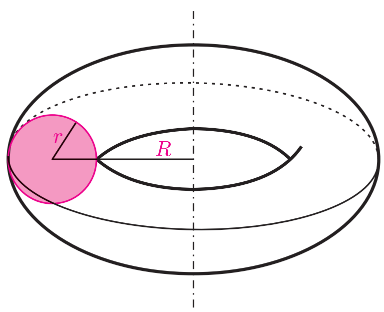
$$\pi d(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) = 2\pi d\frac{\bar{s}_1 + \bar{s}_2}{2} = 2\pi\bar{s}d.$$



A potem stwierdził, że pole powierzchni można z dowolną dokładnością przybliżyć prostokącikami, a obwód odcineczkami i sprawdził, że środki ciężkości przy takim przybliżaniu zachowują się jak należy.

W niektórych książkach można znaleźć uogólnienie reguł Guldina, które przypisuje się żyjącemu 1300 lat wcześniej Pappusowi. W myśl tego uogólnienia można nie tylko mówić o obrotach, ale też o dowolnym ruchu. Wtedy we wzorach należy zastąpić $2\pi s$ i $2\pi\bar{s}$, odpowiednio, przez drogę środka ciężkości powierzchni i drogę środka ciężkości brzegu $\mathcal{F}$.

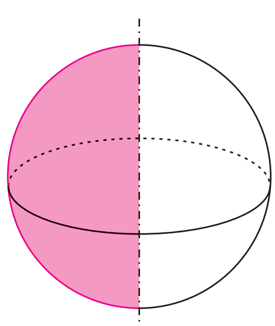
Faktycznie, np. dla przesunięcia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny figury $\mathcal{F}$ tak jest. I jeszcze w bardzo wielu przypadkach. Ale twierdzenia matematyki muszą być spełnione we wszystkich dopuszczonych przez założenia sytuacjach. A tu tak nie jest.



Czytelnik Ambitny znajdzie przykłady przeczące tak śmiałemu uogólnieniu, a nawet wskaże, jak należałoby wzmocnić założenia, by uogólnienie uratować. Mniej ambitny znajdzie odpowiedź w numerze.

A my wrócimy do oryginalnych reguł Guldina, by obliczyć objętość i pole powierzchni torusa. Torus to bryła powstała w wyniku obracania koła wokół prostej leżącej w jego płaszczyźnie i niemającej z tym kołem punktów wspólnych. Środek ciężkości powierzchni koła jest też środkiem ciężkości ograniczającego je okręgu – to środek koła (gdyby było inaczej, obracając koło, otrzymalibyśmy wiele środków ciężkości). Zatem (patrz rysunek) $s = \bar{s} = R$, pole obracanego koła to πr^2, a długość ograniczającego je okręgu to $2\pi r$. Mamy więc

$$V_{\text{torusa}} = 2\pi R\pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2, \qquad S_{\text{torusa}} = 2\pi R 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$



A na zakończenie zagadka: przyjrzyjmy się półkolu – czy bliżej odcinającej je średnicy leży środek ciężkości powierzchni półkola, czy też ograniczającego je półokręgu? Zapytajmy o to kolegów, a sami obliczmy.

Z obracania półkola względem odcinającej go średnicy otrzymujemy kulę – jej objętość to $\frac{4}{3}\pi r^3$, a pole powierzchni to $4\pi r^2$. Z reguł Guldina mamy więc

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi s\frac{1}{2}\pi r^2, \quad \text{zatem} \quad s = \frac{4}{3\pi}r,$$

$$4\pi r^2 = 2\pi\bar{s}\pi r, \quad \text{zatem} \quad \bar{s} = \frac{2}{\pi}r.$$

A więc środek ciężkości półkola leży bliżej średnicy niż środek półokręgu. Czy koledzy zgadli?

Marek KORDOS