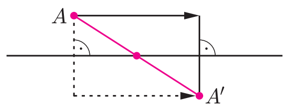
deltoid 83

Mały wybór? I dobrze! *Joanna JASZUŃSKA*

Izometrią nazywamy przekształcenie, które nie zmienia odległości między punktami. Obrazy trzech niewspółliniowych punktów jednoznacznie ją wyznaczają. Twierdzenie Chaslesa głosi, że *każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem.*

Z dowodami powyższych faktów można się zapoznać w tym numerze *Delty* na stronach 16–19.

Symetria z poślizgiem to złożenie (w dowolnej kolejności) symetrii osiowej z przesunięciem o wektor równoległy do osi (rys. 1). Przekształcenie to zmienia orientację (rys. 2). Z kolei przesunięcie i obrót nie zmieniają orientacji, a szczególnym przypadkiem każdego z nich jest identyczność.

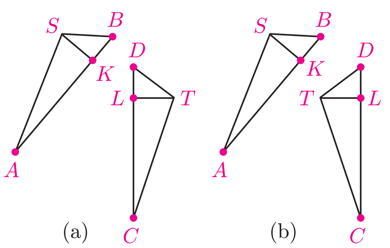


Rys. 1. Gdy wektor przesunięcia jest zerowy, uzyskujemy symetrię osiową.

Przekształcenie figury $A_1A_2\ldots A_n$ na $B_1B_2\ldots B_n$ oznacza przekształcenie A_i na B_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uwaga (∗) Przy symetrii z poślizgiem środek odcinka łączącego punkt i jego obraz leży na osi symetrii (rys. 1).

Uwaga (∗∗) Niech punkty K i L należą odpowiednio do odcinków AB i CD, przy czym $AK = CL$ (rys. 2). Zbudujmy na odcinkach AB i CD przystające trójkąty ABS i CDT o spodkach wysokości odpowiednio K i L. Można zrobić to dwojako: tak, by trójkąty te były przeciwnie lub zgodnie zorientowane. W każdym z przypadków istnieje dokładnie jedna izometria przeprowadzająca jeden na drugi. W pierwszym przypadku jest ona symetrią z poślizgiem. W drugim jest to przesunięcie, jeśli $AB \parallel CD$ lub obrót, jeśli $AB \nparallel CD$.



Rys. 2. Trójkąty ABS i CDT są (a) przeciwnie i (b) zgodnie zorientowane.

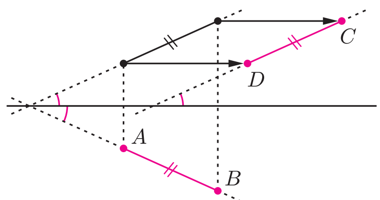
1. W czworokącie $ABCD$ punkty E i F są środkami boków BC i DA, ponadto $AB = CD$. Wykaż, że prosta EF tworzy z prostymi AB i CD równe kąty.

2. Przystające kwadraty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są przeciwnie zorientowane. Udowodnij, że środki odcinków AA', BB', CC', DD' są współliniowe.

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $BD = CE$, $DF = EA$, $FB = AC$. Wykaż, że symetralne boków BC, DE, FA przecinają się w jednym punkcie.

4. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że $AD = BC$ oraz boki AD i BC nie są równoległe. Zmienne punkty E i F należą odpowiednio do boków BC i AD, przy czym $BE = DF$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, proste BD i EF w punkcie Q, a proste EF i AC – w punkcie R. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach PQR mają wspólny punkt różny od P.

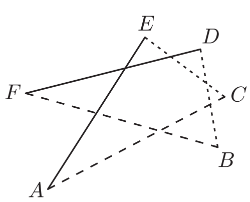
Rozwiązania i wskazówki



Rys. 3

R1. Na mocy (∗∗) istnieje symetria z poślizgiem, przeprowadzająca odcinek AB na DC (rys. 3). Na mocy (∗) jej osią jest prosta EF. Prosta AB i jej obraz (prosta równoległa do CD) tworzą z osią symetrii równe kąty, co kończy dowód. □

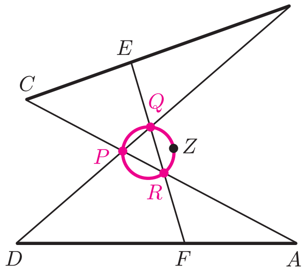
Wskazówka 2. Warto najpierw uzasadnić, że istnieje symetria z poślizgiem przeprowadzająca $ABCD$ na $A'B'C'D'$, a następnie wykorzystać uwagę (∗).



Rys. 4

R3. Trójkąty BDF i CEA są przystające i tak samo zorientowane (rys. 4), istnieje więc izometria zachowująca orientację, która przeprowadza jeden z nich na drugi. Odcinki BD i CE przecinają się, jako przekątne czworokąta wypukłego $BCDE$. Stąd rozważana izometria jest obrotem; oznaczmy jego środek przez X.

Wówczas $XB = XC$, czyli punkt X leży na symetralnej odcinka BC. Analogicznie leży też na symetralnych DE i FA, co kończy dowód. □



Rys. 5

R4. Na mocy (∗∗) istnieje obrót przeprowadzający trójkę AFD na CEB; oznaczmy jego środek przez Z (rys. 5). Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3, punkt Z należy do symetralnych odcinków AC i BD (a więc nie zależy od wyboru punktów E i F) oraz do symetralnej EF. Stąd rzutami punktu Z na odcinki AC, BD, EF są ich środki.

Ponownie na mocy (∗∗) istnieje symetria z poślizgiem, która przeprowadza trójkę AFD na CEB. Na mocy (∗), środki odcinków AC, BD i EF są wówczas współliniowe. Wykazaliśmy, że są to rzuty punktu Z, więc korzystając z twierdzenia o prostej Simsona uzyskujemy wniosek, iż stały punkt Z leży na każdym z okręgów opisanych na zmiennych trójkątach PQR. □

Zadanie 4 pochodzi z 46. Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Więcej o prostej Simsona w *deltoidzie* z numeru 9/2015.