

5

mała delta



Czy Kapturek przygotowuje wypieki dla siebie?



Ile bułeczek Kapturek spakowała do koszyka, skoro połowa wszystkich bułeczek i połowa połowy to taka sama wielkość?

Ile czasu zajęłoby przygotowanie dziewięciu Kapturkom sześciu milionów bułeczek, jeżeli półtorę Kapturka robi półtora miliona bułeczek w ciągu półtora dnia?



Rozwiązanie zadania F 891.
Równanie ruchu satelity po orbicie kołowej jest dane wzorem

$$(1) \quad \frac{mv_R^2}{R} = \frac{GmM_Z}{R^2} = \frac{mgR_Z^2}{R^2},$$

gdzie v_R – prędkość satelity na orbicie kołowej o promieniu R , M_Z – masa Ziemi, R_Z – jej promień. Załóżmy, że w ciągu krótkiego czasu Δt promień orbity zmniejszył się o ΔR pod wpływem siły F . Z zasady zachowania energii mamy związek

$$(2) \quad \frac{mv_{R-\Delta R}^2}{2} - \frac{mv_R^2}{2} + \left(-\frac{mgR_Z^2}{R-\Delta R} - \left(-\frac{mgR_Z^2}{R} \right) \right) = -Fv\Delta t.$$

Równanie ruchu satelity po orbicie o promieniu $R - \Delta R$ z prędkością $v_{R-\Delta R}$ ma postać

$$(3) \quad \frac{mv_{R-\Delta R}^2}{R-\Delta R} = \frac{mgR_Z^2}{(R-\Delta R)^2}.$$

Znajdując prędkości v_R^2 i $v_{R-\Delta R}^2$ z zależności (1) i (3) i podstawiając je do zależności (2) otrzymujemy

$$\Delta R = \frac{2FvR(R-\Delta R)}{mgR_Z^2} \Delta t.$$

Korzystając z tego, że $\Delta R \ll R$ oraz $R \approx R_Z$ znajdujemy prędkość zniżania się satelity

$$v_z = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2FvR(R-\Delta R)}{mgR_Z^2} \approx \frac{2Fv}{mg}.$$

Czerwony Kapturek

Dym zaczął radośnie buchać ze starego, ceglanego komina. To znak, że Czerwony Kapturek, właścicielka najbardziej czerwonego kubraczka w stumilowym lesie, rozpoczęła już swoje wyśmienite wypieki. Świeżutkie bułeczki dostaną wszyscy ci i tylko ci mieszkańcy lasu, którzy sami nie robią dziś wypieków. Poza kulinarnymi umiejętnościami Czerwony Kapturek jest również znana z niesamowicie sprawnego roweru oraz umysłu, dzięki którym świadczone przez nią usługi kurierskie zyskały wielu stałych klientów. Tego słonecznego poranka dziewczynka ma do wykonania trzy dostawy, każda po tyle samo bułeczek. *Pierwsza to połowa wszystkich wypieków z koszyka. Druga to połowa tego, co zostanie. Potem przerwa pod bujną jabłonią, należy mi się jedna bułeczka* – tu zamyśliła się nieco – *Wszystko, co zostanie w koszyku, będzie dla krasnoludków* – Kapturek zanotowała harmonogram w swoim kajecie.

Spakowawszy kosz łakoci, ruszyła skocznym krokiem w kierunku plantacji topoli. Zatrzymała się, żeby złapać oddech w cieniu starego dębu, który tym razem stał dostojnie, nie dając po sobie poznać, że jest najstarszym drzewem w stumilowym lesie oraz że wczoraj go tu jeszcze nie było. Ruszając w dalszą drogę, potknęła się swoim skórzanym trzewikiem, którego nic nie może zatrzymać, o kamień, którego nic nie może poruszyć. *Skąd się tu wziął?* – pomyślała, a chyba nawet powiedziała, bo spod kamienia wychylił się krasnoludek zawsze mówiący prawdę i cichutko odpowiedział

Ten kamień wziął się stamtąd, wskazał palcem, albo skądinąd.

Kapturek uśmiechnęła się życzliwie, podziękowała za tę niekoniecznie pożyteczną, ale rzecz jasna prawdziwą odpowiedź na pytanie, którego nie chciała zadać i ruszyła dalej.

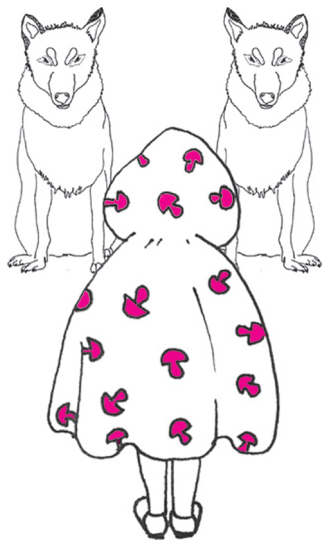
Po niespełna godzinnym spacerze, umiłonym świergotem ptaków, szumem drzew oraz dźwiękami cykad, dotarła do chałupki topologa (plantatora topoli) i zapukała stanowczo ciężką antabą. Po odgłosach 34 kroków i długiej minucie, podczas której Kapturek była niedyskretnie obserwowana przez judasza, otwały się wielkie drzwi. Właściciel plantacji przywitał Kapturka nieco szerszym niż zwykle uśmiechem. Wyglądał tak, jak każdego innego z 3123 poranków, kiedy to Kapturek raczyła go swoimi wypiekami, poza amarantową hiperbolą namalowaną na prawie całej jego twarzy. *Znowu leśne chochliki płatają figle. Dobrze, że zamontowałam w oknach moskitierę* – pomyślała dziewczynka, nie dając z grzeczności po sobie poznać, że topolog wygląda dziś niecodziennie. Połowa zawartości już znalazła się w silnych dłoniach plantatora i drzwi miały się zamknąć, kiedy to znikąd pojawił się krasnoludek zawsze mówiący prawdę i nieco piskliwie wychichotał

Przynajmniej jedno z was wie, że jedna osoba ma namalowaną na twarzy funkcję różnowartościową.

Czy znowu jakaś prawdziwa, ale niekoniecznie pożyteczna informacja? Kapturek dokładnie wiedziała, że przynajmniej jedno z nich ma na twarzy funkcję. W końcu widziała ją na twarzy topologa. Po chwili milczącego

Skąd Kapturek wiedziała, że ma pomalowaną twarz?

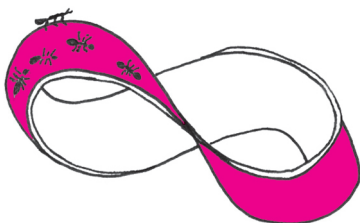
Zbiory o własnościach kwiecistej łąki nazywamy *gęstymi*. Przykłady można znaleźć w zbiorze liczb rzeczywistych. W dowolnie małym otoczeniu (przedziale) liczby wymiernej znajdują się również inne liczby wymierne. Inaczej: nie istnieje takie otoczenie liczby wymiernej (chabru), żeby nie było w nim żadnej innej liczby wymiernej (chabru), niewymiernej (maku) zresztą również.



Jeśli cierpisz na chroniczny nadmiar czasu, spróbuj wykonać ową trysekcję kąta.

Jeżeli zastanawiasz się, dlaczego Czerwony Kapturek musiała zadać pytanie odnośnie drogi, skoro jest to trasa prawie co dzień przez nią uczęszczana – wiedz, że tak jak leśne przemeblowanie nie jest niczym nadzwyczajnym, tak i zmiana leśnych ścieżek, które wyglądają na wydeptane od lat i zmiana lokalizacji urwisk jest tutaj codziennością.

Jakie pytanie zadała Kapturek wilkom, żeby dowiedzieć się, która trasa prowadzi na urwisko?



Matematyczna konstrukcja takiej „wycinanki” nosi nazwę *paradoksu Banacha–Tarskiego*.

przyglądania wyjęła śnieżnobiały ręczniczek ze swojego fartuszka i starła funkcję ze swojej buzi. W tym samym momencie topolog również otarł twarz. Zarumieniona Kapturek pożegnała się życzliwie i z łżejszym koszykiem, bez funkcji na twarzyczce ruszyła w dalszą drogę.

Wybrała ścieżkę nie najkrótszą, ale za to najbardziej urokliwą. Łąka, przez którą kroczyła, była tak gęsto usiana chabrami i makami, że gdy wybierała dowolnie małą „łączkę” dookoła chabru, zawsze znalazł się na tej łączce inny chaber oraz mak. Tak samo niezwykle były maki. Kapturek uwielbiała przyglądać się temu zjawisku.

Odgłosy żab przypomniały o obowiązkach, dziewczynka ruszyła więc, zastanawiając się nad wypiekiem ciasta drożdżowego, w którym jagody i czekolada byłyby upakowane tak, jak kwiaty na łące. Ścieżka rozwidlała się przy olbrzymim głazie, gdzie na wypieki czekały już zniecierpliwione wilki bliźniacy. Widać w lesie zarządzono przemeblowanie, wczoraj głazu jeszcze tutaj nie było.

Dlaczego masz taki czerwony kapturek? – zapytał pierwszy.

Żebyś mnie lepiej widział – odpowiedziała z uśmiechem Kapturek.

Pytanie to słyszała przynajmniej 104 razy dziennie, odkąd babcia postanowiła zainwestować w jej bezpieczeństwo i sprawiła pelerynkę z fluorescencyjnych muchomorów. Drugi o nic nie zapytał, tylko wskazał na napis wyryty dzisiejszego poranka na głazie. A napisane było:

Dwa wilki strzegą rozwidlenia. Jeden zawsze mówi prawdę, drugi zawsze kłamie. Jedna z drózek prowadzi na urwisko, druga do domku babci. Możesz zadać tylko jedno pytanie jednemu wilkowi, na które odpowiedź będzie brzmieć TAK lub NIE, aby dowiedzieć się, która droga prowadzi dokąd.

Kapturkowi żal zrobiło się wilków, które zarządca lasu co rusz wyznaczał do przedziwnych zadań. Na przykład przez ostatni miesiąc jeden z wilków konstruował kąty, a drugi miał sprawdzać, czy przy użyciu tylko cyrkla i linijki bez podziałki można podzielić je na trzy równe części. Wilki nie miały za szczęśliwych min, ani wtedy, ani teraz. Kapturek zostawiła porcję bułeczek, dorzuciła również tę zaplanowaną na jej drugie śniadanie. Dowiedziawszy się, która droga prowadzi na urwisko, ruszyła nią.

Po długiej i krętej wędrówce, w czasie której dziewczynka zdążyła wpaść w mokradła, pomóc mrówkom przejść na drugą stronę wstęgi Möbiusa, zdjęć niedźwiedzia z najwyższej w lesie brzozy, dotarła na sam koniec lasu. Podeszła ostrożnie na skraj urwiska, nad którym siedział krasnal mówiący za dużo i majstrował coś przy wczorajszej bułeczce.

Hej Kapturku, dobrze, że już jesteś!

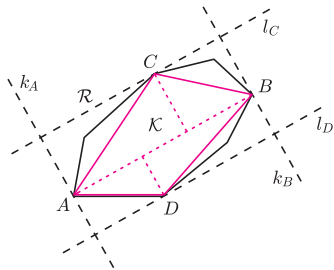
Kapturek spojrziała pytająco na wczorajszą bułeczkę.

W „nagrodę” za swoje zachowanie – trochę mówiłem, wtedy kiedy nie powinienem – mogę dziś tymi matematycznymi nożyczkami „rozmnazać” Twoje bułeczki! Pamiętasz, jak krasnale Bananaś i Tatarski podczas ozdabiania świątecznego drzewka znaleźli sprytny sposób, jak pociąć, a następnie poskładać bombkę, żeby z jednej otrzymać dwie identyczne? Tak, z dokładnie tych samych fragmentów, bez dokładania czegokolwiek. Dlatego wygraliśmy w konkursie na najpiękniejszą choinkę! Teraz stosuję to do Twoich bułeczek. Dzięki temu będziesz mogła wypiekać tylko połowę tego, co dotychczas!

A nawet jedną czwartą, ósmą i jak będzie trzeba, to tylko jedną bułeczkę dziennie, a może i pół, albo okruszek. . . – odparła Kapturek, nieco

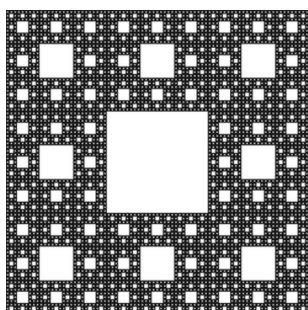


Rozwiązanie zadania M 1474.
Niech K będzie wielokątem z treści zadania.

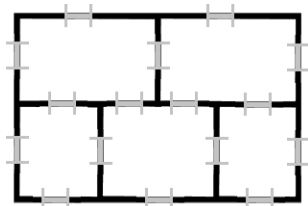


Spośród wszystkich wierzchołków K wybierzmy te dwa, które są najdalej od siebie, i oznaczmy je przez A i B . Przez te wierzchołki przeprowadźmy proste k_A i k_B , prostopadłe do odcinka AB . Wówczas K jest zawarty w pasie \mathcal{P} ograniczonym prostymi k_A i k_B . Po obu stronach prostej AB znajdziemy te wierzchołki K , które są najdalej od tej prostej, i nazwijmy je C i D (być może któryś z nich jest wierzchołkiem A lub B). Przez C i D poprowadźmy proste l_C i l_D , równoległe do AB . Wielokąt K jest zawarty w pasie \mathcal{Q} ograniczonym tymi prostymi, jest zatem zawarty w prostokącie \mathcal{R} , będącym przecięciem pasów \mathcal{P} i \mathcal{Q} . Z konstrukcji wynika, że pole prostokąta \mathcal{R} jest dwa razy większe od pola S czworokąta $ADBC$, który jest zawarty w K . Zatem $|\mathcal{R}| = 2S \leq 2|K| = 2$.

Czy gdyby Kapturek zostawiła u krasnoludków wszystkie wypieki, to zgodnie z tym, co powiedział krasnoludek zawsze mówiący prawdę, dziewczynka faktycznie nie mogłaby rozmawiać z krasnoludkami?

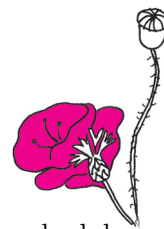


Kształt obrusa.



Plan chatki krasnoludków – znajdź taką ścieżkę, że z każdych drzwi użyjesz dokładnie raz. Podpowiedz, jak to zrobić, znajduje się w tekście. Dokładniej chodzi o sposób, w jaki Kapturek opuściła chatkę.

zdegustowana pomysłem rozmnażania jej wypieków. Spojrzała zamyślona w dal.



Koniec stumilowego lasu oznaczał również koniec wszechświata. Za urwiskiem znajdowało się nicanic, a w każdym razie niktanikt to zbadał. A raczej jeżeli ktośaktoś to zbadał, to nie podzielił się tym, co zbadał, z Kapturkiem, ani nikim, kto ten wynik rozgłosiłby na tyle, żeby dotarł on do Kapturka. Urwisko zastanawiało dziewczynkę już od dłuższego czasu. Okruszki, które spadały krasnalowi, który mówi za dużo, za koniec wszechświata trafiały więc niewiadomodokąd i działo się z nimi niewiadomocoidlaczego. Krasnoludek, widząc niezrozumiałą dla niego minę dziewczynki, przerwał swoje wycinanki i zaprosił Kapturka do domku. Krasnoludek zawsze mówiący prawdę czekał już na pieńku na przepyszne wypieki oraz swoją comiesięczną dawkę prawdy, *Deltę* – firma Kurierski Kapturek trudzi się również kolportażem czasopism popularnonaukowych. Widząc Kapturka, uraczył ją dawką szczerości:

*Żaden Czerwony Kapturek przebrany za wilka nie jest bez poczucia humoru.
Żaden Czerwony Kapturek bez koszyczka nie będzie rozmawiał z krasnoludkiem.*

*Czerwone Kapturki z warkoczami zawsze przebierają się za wilki.
Żaden Czerwony Kapturek z poczuciem humoru nie ma pustego koszyczka.
Żaden Czerwony Kapturek nie ma koszyczka, jeśli nie ma warkoczy.*

Wszystko, co powiedział krasnoludek zawsze mówiący prawdę, było oczywiście prawdą najprawdziwszą. Kapturek zaczęła zastanawiać się, czy po zostawieniu wszystkich wypieków w chatce krasnoludków, gdy jej koszyk zostanie pusty, będzie mogła rozmawiać z krasnoludkami. Na wszelki wypadek postanowiła nie zostawiać wszystkich bułeczek, żeby móc powiedzieć „Do widzenia”.

Kapturek weszła do kuchni, gdzie krasnoludki kończyły przygotowywać wielki dębowy stół do porannego biesiadowania. Na białym żakardowym obrusie o splocie Kwadratu Sierpińskiego ustawione były różne przysmaki i kolorowe talerze, każdy o kształcie innego forekąta wielomnego. Liczba kątów talerza decydowała o randze krasnoludka. Na stole zdecydowanie brakowało pieczywa. Kapturek zwróciła się do krasnoludka siedzącego przy talerzu, którego kształt na oko nierozróżnialny był z kołem i wręczyła mu prawie wszystkie bułeczki ze swojego koszyka. Krasnale Bananasa i Tatarski, siedzący przy talerzach o kształtach konstruowanych przy użyciu cyrkla i linijki, wycinali w obrusie kolejne oczka. Mimo zachęcania krasnoludków, żeby zjadła z nimi, Kapturek grzecznie odmówiła, tego dnia miała bowiem jeszcze wiele innych zleceń. Skusiła się jednak na mały spacer po domku, którego zwiedzaniu nigdy oprzeć się nie mogła.

Domek krasnoludków był chatą o pięciu pomieszczeniach. Między każdymi dwoma mającymi wspólną ścianę znajdowały się drzwi. Drzwi wyjściowe z domku znajdowały się na każdej zewnętrznej ścianie pokoju. Domek miał również taką sprytną własność, że można było znaleźć spacerową trasę przechodzącą przez wszystkie drzwi dokładnie raz. Kapturek dobrze znała ten domek i przy każdej wizycie planowała remont swojej chatki, żeby móc przechadzać się w taki sposób. Po krótkim rekonesansie pożegnała się z krasnoludkami i trasą na skróty, prosto z kuchni, bez używania drzwi wyjściowych wróciła do swojej chałupki. Tak upłynął poranek menadżerowi jednoosobowej działalności gospodarczej Kurierski Kapturek.

Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK