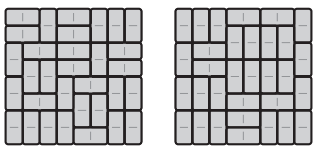
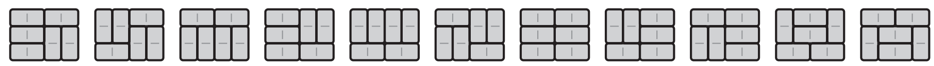
Zliczamy skojarzenia (I)
O układaniu domina i permanencie

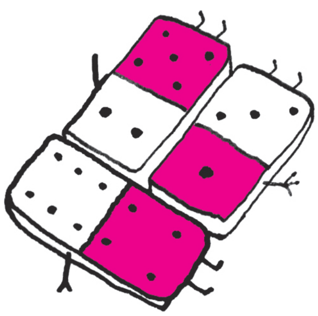
Tomasz IDZIASZEK



Rys. 1. Dwa spośród 12 988 816 przykryć szachownicy rozmiaru 8×8 za pomocą 32 kostek domina.

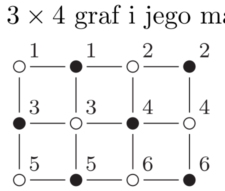
Zajmiemy się takim oto zadaniem: dana jest szachownica rozmiaru $n \times m$ i $N = nm/2$ kostek domina, z których każda może przykryć dwa sąsiednie pola szachownicy. Na ile sposobów możemy przykryć całą szachownicę? Przyjmujemy, że dwa sposoby są różne, jeśli istnieją dwa pola przykryte w pierwszym sposobie tą samą kostką, a w drugim sposobie różnymi kostkami (rys. 1). Przykładowo, szachownicę rozmiaru 3×4 można przykryć sześcioma kostkami na 11 sposobów (uzyskujemy $3 \cdot 3$ sposobów, jeśli przykrywamy niezależnie lewą i prawą połówkę, oraz dodatkowe 2 sposoby, gdy istnieją kostki leżące na obu połówkach):





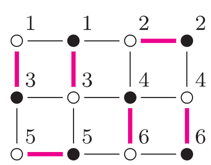
Aby rozwiązać to zadanie, naszą szachownicę przedstawimy jako graf. Każdemu polu szachownicy będzie odpowiadał jeden wierzchołek, a krawędź będzie łączyła dwa wierzchołki, jeśli odpowiadające im pola sąsiadują (mają wspólny bok). Wierzchołki, tak jak pola szachownicy, możemy pomalować na biało i czarno. Zauważmy, że każda krawędź będzie łączyć wierzchołki różnych kolorów, zatem uzyskany przez nas graf będzie *dwudzielny*. Oznaczmy jego białe wierzchołki przez $u_1, \ldots, u_N$, a czarne przez $v_1, \ldots, v_N$, co więcej, ponumerujmy te wierzchołki kolejno wierszami i załóżmy, że liczba kolumn m jest parzysta (co najmniej jedna z liczb n, m musi taka być).

Graf dwudzielny możemy też opisać za pomocą zerojedynkowej macierzy dwusąsiedztwa $A = (a_{i,j})$ rozmiaru $N \times N$, w której $a_{i,j} = 1$ wtedy, gdy istnieje krawędź łącząca biały wierzchołek u_i z czarnym wierzchołkiem v_j. Przykładowo, dla szachownicy 3×4 graf i jego macierz dwusąsiedztwa wyglądają następująco.

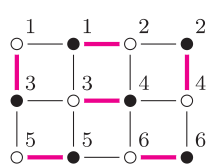


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A czym w terminologii grafowej są pokrycia szachownicy kostkami domina? Otóż odpowiadają one *doskonałym skojarzeniom*, czyli takim zbiorom złożonym z N krawędzi grafu, że każdy wierzchołek jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią z tego zbioru. Natomiast w macierzy dwusąsiedztwa odpowiadają one wybraniu N komórek z wartością 1, z których żadne dwie nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie.



$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



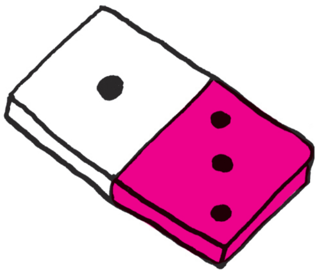
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

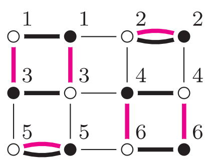
Rys. 2. Doskonałe skojarzenia (wyróżnione kolorem) w kracie 3×4 odpowiadające permutacjom π_1 i π_2.

Aby wyznaczyć liczbę doskonałych skojarzeń, można rozważyć wszystkie przyporządkowania, które każdemu wierzchołkowi białemu przypisują pewien wierzchołek czarny połączony z nim krawędzią (przy czym każdy wierzchołek czarny musi być przypisany dokładnie jednemu wierzchołkowi białemu). Takie przyporządkowanie można zakodować za pomocą permutacji π zbioru $\{1, \ldots, N\}$, która wierzchołkowi u_i przypisuje wierzchołek $v_{\pi(i)}$. Wierzchołki te są połączone krawędzią, jeśli $a_{i,\pi(i)} = 1$, zatem przyporządkowanie jest poprawne, gdy iloczyn $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{N,\pi(N)}$ jest równy jeden (rys. 2). Tak więc liczba doskonałych skojarzeń to po prostu permanent macierzy A:

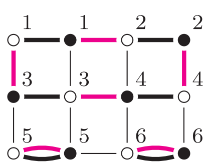
$$\operatorname{perm}(A) = \sum_{\pi} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{N,\pi(N)}.$$

W krótkiej notatce *O wieżach, permanencie i parzystości* zamieszczonej w *Delcie* 10/2010 pisaliśmy już o tym, jak efektywnie obliczać *parzystość* permanentu macierzy całkowitoliczbowej przez porównanie go z wyznacznikiem tej samej macierzy. Wspomnieliśmy również, że problem obliczenia permanentu (a nie tylko jego parzystości) jest dużo trudniejszy i nie znamy dla niego szybszych algorytmów niż wykładnicze ze względu na N. W szczególności oznacza to, że nie znamy lepszych algorytmów wyznaczania liczby doskonałych





$\pi_1 = (1\ \ 3)\ (2)\ (4\ \ 6)\ (5)$
$\mathrm{sgn}(\pi_1) = 1$



$\pi_2 = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)\ (5)\ (6)$
$\mathrm{sgn}(\pi_2) = -1$

Rys. 3. Pokrycia cyklowe (wyróżnione pogrubionymi krawędziami) w kracie 3×4 odpowiadające permutacjom π_1 i π_2, oraz reprezentacja cyklowa i znaki tych permutacji.

skojarzeń w dowolnych grafach dwudzielnych. Okazuje się jednak, że w przypadku specjalnego rodzaju grafu (kraty $n \times m$), z którym mamy tu do czynienia, możemy to zrobić w czasie wielomianowym. I znowu pomoże nam w tym fakt, że umiemy efektywnie obliczać wyznacznik macierzy.

Przypomnijmy, że wyznacznik również można zdefiniować w języku permutacji. Jest to analogiczna suma jak w przypadku permanentu, z tym że iloczyn odpowiadający permutacji π mnożymy teraz przez *znak* tej permutacji, który oznaczymy przez $\mathrm{sgn}(\pi)$:

$$\det(A) = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{N,\pi(N)}.$$

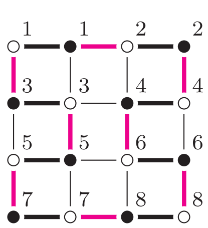
Do zdefiniowania znaku permutacji przyda nam się pojęcie *cyklu* permutacji. Cyklem długości s nazwiemy ciąg indeksów $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_s)$, dla którego zachodzi $\pi(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = i_3$, $\ldots$, $\pi(i_s) = i_1$. Każdą permutację możemy przedstawić w postaci zbioru rozłącznych cykli. Permutacja π jest parzysta, a jej znak wynosi $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$, jeśli w jej rozkładzie na cykle występuje parzysta liczba cykli parzystej długości. W przeciwnym przypadku permutacja jest nieparzysta, a jej znak to $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$.

Jeśli w grafie wyróżnimy krawędzie doskonałego skojarzenia odpowiadającego permutacji π, a także wszystkie krawędzie łączące pary wierzchołków o różnych kolorach, lecz tych samych numerach (tzn. u_i z v_i), to każdy wierzchołek będzie incydentny z dokładnie dwiema krawędziami z wyróżnionego zbioru, zatem zbiór ten będzie *pokryciem cyklowym* grafu (czyli takim zbiorem rozłącznych cykli, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu). Przy czym dopuszczamy, że niektóre krawędzie wyróżnimy dwukrotnie, co będzie odpowiadało *trywialnym* cyklom. Zapewne nie zdziwi nas, że każdy cykl długości s z permutacji π wyznacza pewien cykl długości $2s$ z pokrycia cyklowego (rys. 3).

Jesteśmy już gotowi na przedstawienie błyskotliwego pomysłu, który pozwoli nam użyć algorytmu obliczania wyznacznika do obliczenia permanentu macierzy A. Idea polega na takiej modyfikacji niezerowych elementów macierzy A, żeby dla każdej permutacji π, odpowiadającej doskonałemu skojarzeniu, iloczyn $\prod a_{i,\pi(i)}$ był równy 1, jeśli ta permutacja jest parzysta, oraz -1, jeśli jest nieparzysta. Okazuje się, że aby to osiągnąć, wystarczy zastąpić jedynki występujące w komórkach macierzy A odpowiadających pionowym krawędziom kraty przez liczbę zespoloną $i = \sqrt{-1}$. Oznaczmy tak uzyskaną macierz przez A'; dla kraty 3×4 wygląda ona następująco.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Przypatrzmy się, jaki wkład do iloczynu $\prod a_{i,\pi(i)}$ mają krawędzie z doskonałego skojarzenia odpowiadające ustalonemu cyklowi permutacji π. Jeśli oznaczymy liczność każdego z trzech rodzajów krawędzi, które mogą pojawić się na odpowiadającym mu cyklu w grafie, odpowiednio przez e_H (poziome krawędzie ze skojarzenia), e_B (poziome krawędzie nie ze skojarzenia) oraz e_V (pionowe krawędzie, zawsze pochodzące ze skojarzenia), to ten wkład będzie równy $1^{e_H} \cdot i^{e_V}$. Przykładowy cykl wraz z licznościami krawędzi przedstawiono na rysunku 4. Zauważmy, że jeśli cykl ten ma długość 1, to odpowiada mu jedna pozioma krawędź (zatem wkład jest równy 1). Dalej zakładamy zatem, że cykl ten jest nietrywialny.



$\pi_3 = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 2)$

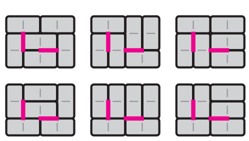
Rys. 4. Cykl w kracie 4×4 odpowiadający permutacji π_3 ma krawędzie: $e_H = 2$, $e_B = 8$, $e_V = 6$.

Aby obejść cykl w grafie i wrócić do punktu wyjścia, liczba pionowych krawędzi, którymi będziemy iść w dół, oraz liczba tych krawędzi, którymi będziemy iść w górę, muszą być równe. Zatem e_V jest liczbą parzystą. Symetryczny argument dowodzi, że liczba $e_H + e_B$ jest parzysta. Co więcej, z uwagi na rozmieszczenie krawędzi nie ze skojarzenia, każde przejście dwiema kolejnymi krawędziami powoduje albo zmianę numeru kolumny o 2 (gdy przechodzimy krawędziami e_B i e_H), albo zmianę parzystości tej kolumny, ale tylko w obrębie pary kolumn, tzn. $j = (j \bmod 2) + 1$ (gdy przechodzimy krawędziami e_B i e_V, więc kolejna krawędź e_B znajduje się tuż pod lub tuż nad poprzednią). Z tego wynika, że obu rodzajów przejść musi być parzyście wiele, zatem liczby e_H i e_V są parzyste. W konsekwencji parzysta jest też liczba e_B, zatem w pokryciu cyklowym wszystkie nietrywialne cykle odpowiadają parzystym cyklom permutacji.

Przypatrzmy się kierunkom (lewo bądź prawo), w których poruszamy się poziomymi krawędziami, podczas obchodzenia cyklu w grafie. Każda zmiana kierunku odbywa się wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzimy pionową krawędzią (znowu wynika to z faktu, że dwie kolejne krawędzie e_B na cyklu rozdzielone krawędzią e_V muszą znajdować się pod sobą). Wynika z tego, że wszystkimi poziomymi krawędziami leżącymi w wierszach o ustalonej parzystości będziemy przechodzić w tym samym kierunku. A ponieważ spośród wierszy kraty zawierających krawędzie z cyklu, pierwszy i ostatni musimy przejść w przeciwnych kierunkach (dlaczego?), więc muszą być one różnej parzystości. Jeśli podzielimy cykl na maksymalne kawałki niezawierające krawędzi z pierwszego i ostatniego wiersza, to dwa z tych kawałków (łączące różne wiersze) będą zawierały nieparzystą liczbę krawędzi e_V. Jako ćwiczenie dla Czytelnika zostawiamy dowód faktu, że w pozostałych kawałkach (łączących ten sam wiersz) liczba krawędzi e_V będzie podzielna przez 4. Z tego wynika, że liczba $e_V/2$ jest nieparzysta.

Skoro zatem e_V jest parzystą liczbą niepodzielną przez 4, to każdemu nietrywialnemu cyklowi permutacji odpowiada wartość $1^{e_H} \cdot 1^{e_v} = (-1)^{e_V/2} = -1$. Ponieważ, jak pokazaliśmy wyżej, wszystkie nietrywialne cykle permutacji odpowiadającej doskonałemu skojarzeniu w kracie są długości parzystej, więc iloczyn $\prod a_{i,\pi(i)}$ będzie równy -1 dokładnie wtedy, gdy będzie ich nieparzyście wiele (w przeciwnym przypadku będzie równy 1). Tak więc będzie on równy znakowi permutacji π. To pokazuje, że $\mathrm{perm}(A) = \det(A')$, zatem

$$\text{liczba doskonałych skojarzeń} = \det(A').$$



Rys. 5. Pokrycia szachownicy 3×4 z dwiema zabronionymi krawędziami (wyróżnione kolorem).

Warto wspomnieć, że jeśli w macierzy A' położymy $a_{i,j} = 0$ dla komórki, która odpowiada krawędzi łączącej wierzchołki u_i i v_j, to $\det(A')$ będzie liczbą tych doskonałych skojarzeń, które nie zawierają tej krawędzi. Odpowiadać to będzie takim układom kostek domina na szachownicy, w których żadna kostka nie przykrywa boku pomiędzy polami odpowiadającymi wierzchołkom u_i i v_j (rys. 5). Łatwo zatem zaadaptować przedstawiony algorytm do liczenia przykryć „dziurawej" szachownicy (usunięcie pola z szachownicy symulujemy poprzez otoczenie go „murkiem" czterech zabronionych krawędzi) lub takich, w których część kostek ma już ustalone położenie.

Trudne pytania

*Przemysław GRZEGORZEWSKI**

Jednym z podstawowych zadań statystyki jest estymacja wskaźnika struktury, albo mówiąc inaczej, szacowanie odsetka osób (elementów, obiektów) charakteryzujących się pewną cechą, będącą przedmiotem prowadzonego badania. Przykładowo, może nas interesować, jaki procent dorosłych obywateli naszego kraju ma prawo jazdy, jaki odsetek dzieci i młodzieży w wieku szkolnym umie pływać itd. Zauważmy, że w obu wspomnianych przykładach mamy do czynienia z cechą o charakterze binarnym, tzn. dopuszczamy tylko dwie wykluczające się odpowiedzi: ktoś ma prawo jazdy albo go nie ma; umie pływać albo nie umie.

Rozwiązanie tak postawionego zadania jest stosunkowo proste: ankieterzy zadają pytania losowo wybranej grupie osób i zliczają odpowiedzi twierdzące. Jeżeli symbolem n oznaczymy liczbę wszystkich uzyskanych odpowiedzi, pośród których k brzmiało „tak", wówczas interesujący nas odsetek osób obdarzonych badaną cechą szacujemy za pomocą ilorazu (ewentualnie mnożonego przez 100%):

$$\widehat{p} = \frac{k}{n}\ (\cdot 100\%). \tag{1}$$

Litera p użyta we wzorze (1) oznacza prawdopodobieństwo tzw. sukcesu (czyli uzyskania odpowiedzi „tak" na zadane pytanie), natomiast dodanie „daszka" nad p

*Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska