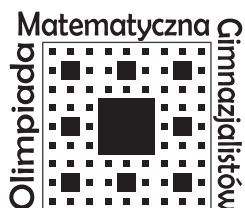


# XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2015/16)

## Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia – część korespondencyjna

(1 września – 12 października 2015 r.)



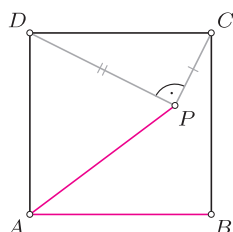
1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek  $(x, y, z)$  dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y - z) + y(z - x) = 6.$$

2. Wewnątrz kwadratu  $ABCD$  wybrano taki punkt  $P$ , że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że  $DP = 2 \cdot CP$ .



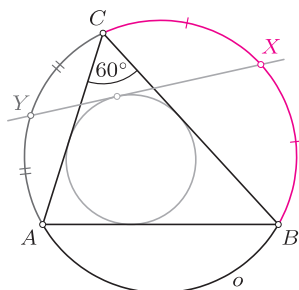
Zadanie 2

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których liczba

$$\frac{n^4 + 4}{17}$$

jest pierwsza.

4. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ . Na trójkącie tym opisano okrąg  $o$ . Punkt  $X$  jest środkiem tego łuku  $BC$  okręgu  $o$ , który nie zawiera punktu  $A$ , a punkt  $Y$  jest środkiem tego łuku  $CA$  okręgu  $o$ , który nie zawiera punktu  $B$ . Udowodnij, że prosta  $XY$  jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ .



Zadanie 4

5. W wierzchołkach  $n$ -kąta foremnego rozmieszczono liczby  $1, 2, \dots, n$  w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdych trzech kolejnych wierzchołkach  $n$ -kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n \geq 3$ , dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste  $p$  i  $q$  mają tę własność, że liczba  $p^2 + p$  jest podzielna przez  $q^2 + q$ . Udowodnij, że liczba  $\frac{1}{2}(p - q)$  jest złożona.

7. Czy istnieje taki ostrosłup  $ABCDS$ , którego podstawą jest prostokąt  $ABCD$  i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość  $AS + CS = BS + DS$ ? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**12 października 2015 r. (decyduje data stempla pocztowego).**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

MINISTERSTWO  
EDUKACJI  
NARODOWEJ



Stowarzyszenie  
na rzecz Edukacji  
Matematycznej

