Skandal z pianą, czyli Afrodyta topologiczna

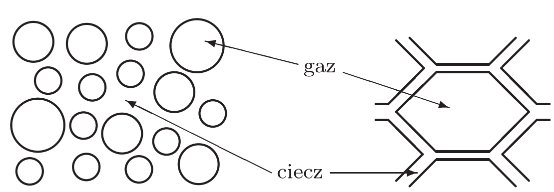
Krzysztof REJMER

Robert Hooke (*Micrographia*, London, 1665) i Nehemiah Grew (*The Anathomy of Plants*, London, 1682) zauważyli niezwykłe podobieństwo struktury komórkowej tkanek do piany. Jednak na tym wcale nie koniec. W XIX wieku niektórzy biolodzy, pod wpływem eksperymentów Plateau i Brewstera, zasugerowali, że w momencie ich powstawania komórki przyjmują kształty co prawda różne, ale zawsze zgodne z warunkiem powierzchni minimalnej. Te koncepcje mają swoje naturalne przedłużenie we współczesnych hipotezach, mówiących, że prekursorem żywej komórki była zdolna do replikowania się protokomórka o ściankach zbudowanych wyłącznie z kwasów tłuszczowych, niezawierających kanałów białkowych i pomp sodowo-potasowych (Jack William Szostak, laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizjologii i medycyny, rok 2009). Szkocki biolog, pionier biologii matematycznej, D'Arcy Wentworth Thompson (1860–1948) zajmował się wpływem praw fizyki na kształty żywych istot, a w szczególności interesował się promienicami. Mają one szkielet krzemionkowy otoczony protoplazmą, który determinuje kształt organizmu; w podobny sposób druciana ramka z doświadczeń Plateau określa kształt rozpiętej na niej mydlanej struktury – powierzchni minimalnej. Związek życia i piany jest chyba oczywisty; jak wiemy, *Afrodyta wyłoniła się z morskiej piany...*

Thompson jest też autorem słynnej książki *On Growth and Form*, którą inny laureat Nagrody Nobla w dziedzinie medycyny, Peter Medawar, nazwał najdoskonalszym w całej historii nauki dziełem literatury, jakie kiedykolwiek zostało napisane po angielsku.

Piana, jaka jest, to chyba każdy widzi... Jednak z definicją jest dużo trudniej. Można spotkać się z określeniem, że piany są to struktury heterofazowe, w których ciecz lub ciało stałe stanowią fazę ciągłą, a gaz fazę rozproszoną. Użycie słowa faza jest tu, niestety, mocno mylące. Mydlana piana to powietrze uwięzione w komórkach, których ścianki zbudowane są z roztworu wody i mydła. A zatem gaz i ciecz nie są różnymi fazami termodynamicznymi tej samej substancji. Zupełnie inną rzeczą jest to, że mydło zmieszane z wodą, w zależności od stężenia i temperatury, może tworzyć różne fazy termodynamiczne. Mówiąc prostymi słowy: piana zbudowana jest z wielu makroskopowych komórek zawierających gaz, rozdzielonych cieńszymi lub grubszymi obszarami cieczy lub ciała stałego. Pianą jest również pumeks oraz bezowe ciastko. A chleb? O pianie mówimy zazwyczaj, gdy ułamek objętości zajmowanej przez gaz jest większy od ułamka objętości zajmowanego przez ciecz lub ciało stałe. Choć duża liczba mydlanych baniek tworzy pianę, to przecież pojedyncza bańka pianą jeszcze nie jest, dwie bańki również nie, podobnie jak dwie osoby nie czynią jeszcze tłumu. Żyjemy w świecie, raju dla demagogów, w którym większość pojęć jest nieostra. Casus piany przypomina słynną megaryjską aporię o łysym...

Interesować nas będą ciekłe piany. Istnieją dwa zasadniczo odmienne ich rodzaje: tak zwana piana sucha, czyli wielościenna, oraz piana mokra (przykładem piana na piwie), zbudowana z mniej więcej kulistych bąbelków gazu zawieszonych w cieczy.



Piana mokra (po lewej) i piana sucha (po prawej); ilustracja dwuwymiarowa

Plateau sformułował podstawowe prawa opisujące morfologię piany suchej:

I. Trzy i tylko trzy powierzchnie tworzące pomiędzy sobą kąty 120° stykają się wzdłuż każdej krawędzi.
II. Cztery i tylko cztery krawędzie łączą się w jednym wierzchołku (tak zwanym wierzchołku tetraedrycznym). Tworzą one zawsze kąty o wartości $\pi - \arccos(1/3) \approx 109°28'16''$.

Te dwa stwierdzenia nie są, oczywiście, niezależne. Należy je uzupełnić trzecią, dodatkową regułą:

III. Jeżeli piana styka się ze zwilżaną powierzchnią, wtedy jej powierzchnie i krawędzie są prostopadłe do tej powierzchni.

W 1887 roku William Thomson (Lord Kelvin) opublikował pracę *On the Division of Space with Minimum Partition Area* (W. Thomson, Phil. Mag. **5**, 503 (1887); W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge U.P. Cambridge 1911, t. 5, s. 297), w której próbował rozwiązać zagadnienie podziału przestrzeni na komórki o jednakowej objętości i zarazem o minimalnej powierzchni ścian. Zagadnienie to nosi nazwę **problemu Kelvina**. Kelvin, rozważając jednakowe komórki, rzecz bardzo uprościł. Mówimy o pianie monodyspersyjnej i polidyspersyjnej, w zależności od tego, czy wszystkie komórki mają jednakową objętość, czy też nie. Prawdziwa piana jest, oczywiście, polidyspersyjna. Thomson jako rozwiązanie problemu Kelvina zaproponował komórkę (tetrakaidekaedr) o kształcie nazwanym potem czternastościanem Kelvina. Jest to ośmiościan, od którego sześciu wierzchołków odcięto ostrosłupy. W ten sposób powstało sześć nowych ścian o kształcie kwadratu, natomiast z ośmiu ścian pierwotnych pozostało osiem ścian o kształcie sześciokąta foremnego. A zatem jest to bryła o czternastu ścianach. Aby spełnić warunek powierzchni minimalnej i zarazem dobrze wypełnić przestrzeń, należy lekko zdeformować tę bryłę. Kwadraty muszą mieć zakrzywione boki, a sześciokąty muszą mieć zakrzywione powierzchnie (choć o zerowej średniej krzywiźnie). Kelvin zbudował duży druciany model nazwany *materacową sprężyną Kelvina*, który przetrwał do dziś na uniwersytecie w Glasgow. Zajmujący się pianami irlandzki fizyk Denis Weaire ten sposób działania nazywa typowym dla Kelvina przyziemnym (down-to-earth) podejściem. Jest to doskonała ilustracja kelvinowskiej maniery sprowadzania wszystkiego do mechanicznego modelu. Zdarzyło się, że Kelvin zalecił studentom krystalografii, by zamówili u tokarza lub wytwórcy drewnianych paciorków do różańców tysiąc drewnianych kulek o średnicy pół cala każda.

Więcej o czternastościanie na str. 11.

Kelvin nie wspomniał ani słowem o jakiejkolwiek próbie zaobserwowania swojej struktury w prawdziwej pianie. To właśnie D'Arcy Wenthworth Thompson docenił jego idee, ale nader lekkomyślnie uznał, że praktyczna demonstracja racji Kelvina jest rzeczą trywialną. W 1940 roku amerykański botanik Edwin Matzke spróbował to udowodnić doświadczalnie, tworząc (jeśli to właściwe słowo) za pomocą strzykawki tysiące jednakowych, dużych bąbelków „idealnej" piany. Zaiste, musiał mieć anielską cierpliwość! Pomimo że nie znalazł ani jednej komórki Kelvina, nadal uważano (zapewne przez szacunek dla upartego Szkota), że Kelvin znalazł najstabilniejszą postać piany. Trzeba jednak dodać, że sens doświadczenia Matzkego był kwestionowany, ponieważ trwało cały dzień, a płynna piana – jak wiadomo – żyje krótko.

Piany to coś znacznie więcej niż tylko zajmująca, geometryczna trudność. Jest to punkt wyjścia do ataku na rzeczywisty problem: piany zawierają losową mieszaninę bąbelków o bardzo różnych rozmiarach. Takie piany w obfitości występują w pubie, w kuchni i w zakładach chemicznych. Są one przedmiotem głębokiego zainteresowania technologów żywności: gdy pieką, warzą i usuwają pieniące się ciecze. Jednak te pożyteczne piany są słabo rozumiane – po prostu brak jest teorii, która dobrze opisuje czubek pinty piwa czy pianę w kieliszku szampana – powiada Weaire.

Przez ponad sto lat hipoteza Kelvina (zgodnie z którą jego tetrakaidekaedr daje minimum energii powierzchniowej) pozostawała nieudowodniona. W 1993 roku Denis Weaire i jego student Robert Phelan znaleźli inną strukturę, która daje lepsze rozwiązanie problemu Kelvina. Nie była niczym nowym! Już w 1775 roku strukturę Weaire'a–Phelana zauważył francuski hutnik i archeolog (ciekawy zestaw!) Pierre Clément Grignon (1723–1784), opisując typowy kształt ziarna stali. Wykorzystuje ona dwa rodzaje komórek o jednakowej objętości. Jedna to nieregularny dodekaedr (dwunastościan) o pięciokątnych ścianach i tetrakaidekaedr (czternastościan) o dwóch sześciokątnych i dwunastu pięciokątnych ścianach, tak jak w przypadku struktury Kelvina – zakrzywionych (oczywiście o zerowej krzywiźnie średniej). Komórka elementarna zawiera sześć czternastościanów i dwa dwunastościany. Jest to rozwiązanie nieco korzystniejsze od rozwiązania podanego przez Kelvina, brak jednak rozstrzygnięcia, czy jest ono optymalne.

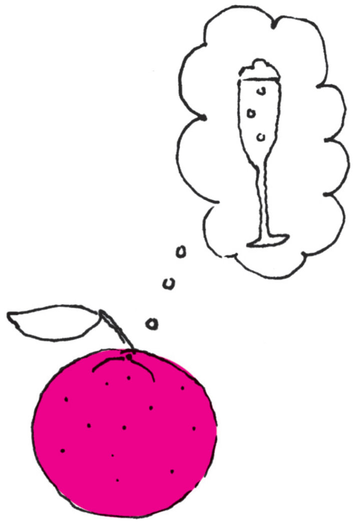
Rozwiązanie zadania F 889.
Po zatrzymaniu ruchu orbitalnego Ziemia zaczęłaby spadać na Słońce ruchem prostoliniowym. Aby skorzystać z III prawa Keplera, potraktujemy ten ruch jak połowę obiegu po elipsie o zerowej krótszej osi i dłuższej osi równej połowie odległości Ziemia–Słońce.

$$\frac{a^3}{T_0^2} = \frac{(a/2)^3}{(2T)^2},$$

gdzie a oznacza odległość Ziemia–Słońce, T_0 to jeden rok, a T jest poszukiwanym czasem spadania. Mamy więc:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} T_0 = 0{,}1768 T_0.$$

Prostoliniowe spadanie Ziemi na Słońce trwałoby nieco ponad 64 dni, 13 godzin i 37 minut, czyli mniej więcej tyle, ile trwają szkolne wakacje.



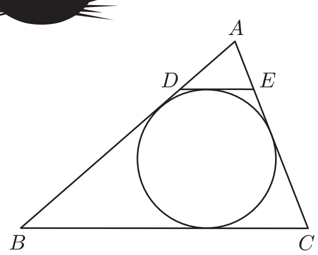
W przypadku piany mokrej problem stabilności sprowadza się do zagadnienia najgęstszego upakowania kul. Jest to takie samo upakowanie, jakiego używają sprzedawcy w sklepach z owocami, układając piramidę z pomarańczy. Rozwiązanie takie zasugerował w 1611 roku Kepler. Dowód podał (wspomagając się komputerem) Thomas Hales dopiero w 1998 roku. Jeszcze w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia słynny matematyk amerykański John Milnor mawiał, że to skandal, iż zagadnienie z odpowiedzią tak bardzo oczywistą, podaną przez Keplera i przez Gaussa, nadal nie ma dowodu.

Ciekłe piany są tworem metatrwałym. Stabilizują ją, na przykład, surfaktanty. Woda mineralna zawiera zwykle znacznie więcej gazu niż piwo, ale brak jej surfaktantów, z tego powodu nie tworzy piany. Na odwrót, piwna brzeczka też nie pieni się, bo wprawdzie zawiera ona surfaktanty, ale brak jej jeszcze dwutlenku węgla.

Istnieje kilka zjawisk o bardzo różnej naturze odpowiedzialnych za rozpad suchej piany. Grawitacja powoduje drenaż, czyli odpływ cieczy do dolnych części wielokomórkowej struktury. Ciśnienie osmotyczne powoduje przepływ substancji w ściance ku jej brzegom. Ciśnienie Laplace'a (czyli różnica ciśnień wynikająca z działania sił napięcia powierzchniowego) wywołuje dyfuzję gazu przez ściankę od małych do dużych pęcherzy. Ścianki mogą pękać w wyniku działania tak zwanego ciśnienia rozszczepiającego (*disjoining pressure*) we wnętrzu błonki. Istnieją także tak zwane procesy topologiczne prowadzące do zmiany liczby ścian. To wszystko powoduje zmiany struktury piany, które mogą być zjawiskiem lokalnym lub kolektywnym, a nawet przebiegającym lawinowo. Ale, niestety, nie zawsze wyłania się Afrodyta...

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1471. Punkt D leży na boku AB, a punkt E na boku AC trójkąta ABC, przy czym prosta DE jest równoległa do BC i styczna do okręgu wpisanego w ABC. Udowodnić, że $8DE \leqslant AB + BC + CA$.
Rozwiązanie na str. 4

M 1472. Na przerwie n uczniów siedzi w kółku. Nauczyciel stojący w środku wybiera jednego z nich, wręcza mu cukierek, po czym podążając zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, opuszcza kolejnego ucznia i wręcza cukierek następnemu, opuszcza dwóch kolejnych uczniów, wręcza cukierek następnemu itd. Udowodnić, że jeśli n jest potęgą dwójki, to w końcu każdy uczeń dostanie cukierka.
Rozwiązanie na str. 5

M 1473. Aga i Bartek grają w następującą grę: Aga wymyśla wielomian o całkowitych, nieujemnych współczynnikach, po czym Bartek chce go odgadnąć, zadając pytania o $P(x)$ dla x całkowitych. Ile pytań wystarczy zadać, aby Bartek odgadł wielomian?
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 889. Ile czasu trwałoby spadanie Ziemi na Słońce, gdyby nagle zatrzymany został jej ruch orbitalny?
Rozwiązanie na str. 9

F 890. Oszacuj, ile wynosi praca potrzebna do napompowania opony roweru, jeśli pompowanie ma być procesem izotermicznym. Przyjmij, że zewnętrzna średnica opony wynosi $D = 70$ cm, szerokość opony to $d = 3$ cm, materiał opony jest nierozciągliwy, a końcowe ciśnienie w oponie to $p = 6 \cdot 10^5$ Pa (wartości typowe dla rowerów turystycznych). Ciśnienie zewnętrzne (atmosferyczne) jest równe $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa, a temperatura wynosi $T = 295$ K.
Rozwiązanie na str. 13