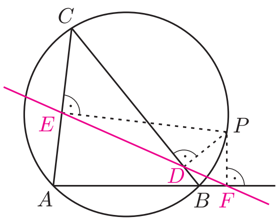
Prosta Simsona

Joanna JASZUŃSKA

Twierdzenie o prostej Simsona brzmi następująco:

($*$) *Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy jego rzuty prostopadłe na proste AB, BC, CA leżą na jednej prostej* (nazywamy ją *prostą Simsona*).

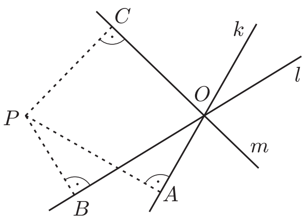


Rys. 1. Prosta Simsona

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Twierdzenie udowodnimy tylko w przedstawionej tam sytuacji, pozostałe przypadki uzasadnia się podobnie.

Punkty P, D, B, F leżą na jednym okręgu w tej właśnie kolejności, więc $\sphericalangle PBD = \sphericalangle PFD$. Analogicznie $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PFE$. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC$, czyli gdy $\sphericalangle PFD = \sphericalangle PFE$, co z kolei równoważne jest współliniowości punktów D, E, F. $\square$

1. Proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie O, a punkt P nie należy do żadnej z nich. Punkty A, B, C są rzutami prostokątnymi punktu P na proste k, l, m. Udowodnij, że rzuty prostokątne P na proste AB, BC, CA są współliniowe.



Rys. 2

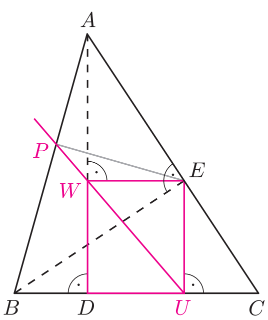
2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D i E są spodkami wysokości AD i BE. Dwa boki prostokąta $DUEW$ są zawarte w prostych AD i BC. Prosta UW przecina bok AB w punkcie P. Wykaż, że proste EP i AB są prostopadłe.

3. Trzy okręgi mają wspólny punkt, a pozostałe trzy punkty ich przecięć są współliniowe. Wykaż, że środki okręgów oraz ich wspólny punkt leżą na jednym okręgu.

4. Punkt E należy do boku BC kwadratu $ABCD$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów E i B na proste BD i DE. Udowodnij, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.

5. Cztery proste przecinające się w sześciu punktach tworzą cztery trójkąty. Udowodnij, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny.

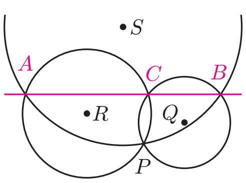
Rozwiązania



Rys. 3

R1. Każdy z punktów A, B, C leży na okręgu o średnicy PO (rys. 2), zatem punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC i teza wynika z twierdzenia ($*$). $\square$

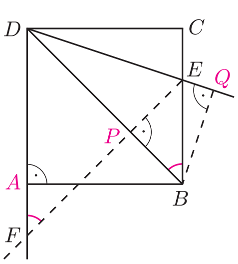
R2. Punkt E należy do okręgu opisanego na trójkącie ABD, bowiem $\sphericalangle AEB = 90° = \sphericalangle ADB$ (rys. 3). Stąd na mocy twierdzenia ($*$) rzut punktu E na prostą AB należy do prostej UW, a więc jest nim punkt P. $\square$



Rys. 4. QRS jest trójkątem, bowiem gdyby $QR \parallel RS$, to także $PC \parallel PA$, co jest niemożliwe.

R3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4. Punkty Q i R leżą na symetralnej odcinka PC, więc rzutem punktu P na prostą QR jest środek PC. Podobnie dla PA i PB, więc rzuty P na proste zawierające boki trójkąta QRS leżą na jednej prostej (równoległej do AB, dwukrotnie bliżej punktu P) i teza wynika z twierdzenia ($*$). $\square$

R4. Niech F będzie punktem przecięcia prostych AD i EP (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle DFE = 45°$, gdyż pozostałe dwa kąty trójkąta DFP mają $90°$ i $45°$. Ponieważ również $\sphericalangle DBE = 45°$, punkty B, E, D, F leżą na jednym okręgu. Teza wynika z twierdzenia ($*$) dla trójkąta DEF. $\square$



Rys. 5

R5. Niech X będzie punktem przecięcia dwóch z danych prostych. Pozostałe dwie proste nie są równoległe, stąd dwa trójkąty o wierzchołku X nie są jednokładne, więc opisane na nich okręgi nie są styczne w X i mają drugi punkt wspólny Y.

Na mocy dwukrotnie zastosowanego twierdzenia ($*$), rzuty punktu Y na wszystkie dane proste są współliniowe. Znów na mocy twierdzenia ($*$), punkt Y należy wówczas także do pozostałych dwóch z danych okręgów. $\square$

Zadanie 5 pochodzi z XII Olimpiady Matematycznej.

Zadania domowe

6. Niech $ABCDE$ będzie wypukłym pięciokątem wpisanym w półkole o średnicy AB. Punkty P, Q, R, S to rzuty punktu D odpowiednio na proste AC, BC, AE, BE. Udowodnij, że proste AB, PQ i RS przecinają się w jednym punkcie.

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i $\sphericalangle ABC = 90°$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD. Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środek odcinka BD.