Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

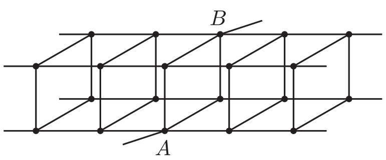
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2015

Zadania z fizyki nr 604, 605

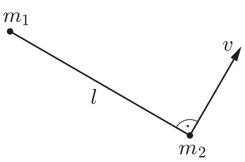
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

604. Znaleźć opór zastępczy między punktami A i B w obwodzie przedstawionym na rysunku 1. Opór każdej krawędzi między węzłami wynosi r. Sieć jest nieskończona w obie strony.

605. Dwa małe ciała o masach m_1 i m_2 związane są nicią o długości l i poruszają się bez tarcia po powierzchni poziomej. W pewnej chwili okazało się, że ciało o masie m_1 jest nieruchome, a prędkość ciała o masie m_2 ma wartość v i jest prostopadła do nici (rys. 2). Jakie jest w tym momencie naprężenie nici?



Rys. 1



Rys. 2

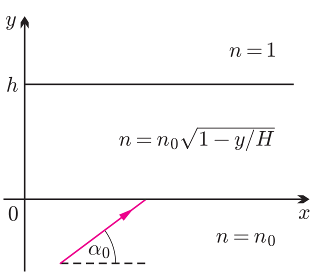
Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

Przypominamy treść zadań:

600. Naczynie o objętości $2V = 20\,\mathrm{l}$ rozdzielone jest na dwie równe części nieruchomą przegrodą. Do jednej części naczynia wprowadzono argon o masie $m_A = 20\,\mathrm{g}$, do drugiej wodór o masie $m_H = 2\,\mathrm{g}$. Przez przegrodę może przenikać tylko wodór. Jakie ciśnienia ustalą się w obu częściach naczynia po ustaleniu się stanu równowagi? Temperatura w części naczynia zawierającej argon wynosi $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, w drugiej części $T_2 = 600\,\mathrm{K}$. Masy molowe argonu i wodoru są odpowiednio równe $m_A = 40\,\mathrm{g/mol}$, $m_H = 2\,\mathrm{g/mol}$.

601. Między dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania $n_0 > 1$ i $n_1 = 1$ znajduje się warstwa ośrodka, w którym współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem $n = n_0\sqrt{1 - y/H}$, gdzie $H = \mathrm{const}$ (patrz rys. 1). Grubość warstwy wynosi $h = H(1 - 1/n_0^2)$. Z ośrodka o współczynniku załamania n_0 wpada do niejednorodnej warstwy promień światła. Dla jakich wartości kąta α_0 promień wróci do optycznie gęstszego ośrodka? Dla jakiej wartości tego kąta odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia będzie największa?

600. Stan równowagi nastąpi, gdy zrównają się strumienie wodoru dyfundującego między częściami naczynia. Strumień dyfuzji jest proporcjonalny do średniej liczby zderzeń cząsteczek wodoru z przegrodą, która z kolei jest proporcjonalna do liczby cząsteczek w jednostce objętości oraz średniej prędkości $\langle v\rangle$ ruchu cieplnego cząsteczek. W danej temperaturze zachodzi związek $\langle v\rangle \sim \sqrt{T}$. Oznaczmy przez k liczbę moli wodoru, które przeniknęły przez przegrodę. Warunek równowagi ma postać: $k\sqrt{T_1} = (1-k)\sqrt{T_2}$, stąd $k = \dfrac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}} = 0{,}6$. Ciśnienie w części zawierającej mieszaninę argonu i wodoru wynosi $p_1 = \left(k\ \mathrm{mol} + \dfrac{m_A}{\mu_A}\right)\dfrac{RT_1}{V} = 2{,}7\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, w drugiej części $p_2 = (1-k)\ \mathrm{mol}\dfrac{RT_2}{V} = 2{,}0\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$.



Rys. 3

601. Podczas ruchu światła w ośrodku niejednorodnym zmienia się kąt α, jaki tworzy styczna do toru z osią x. Zgodnie z prawem załamania zachodzi związek $n\cos\alpha = n_0\cos\alpha_0$. Rozważmy ruch punktu materialnego, którego prędkość wzdłuż granicy ośrodków jest stała: $v(y)\cos\alpha = v_0\cos\alpha_0$, gdzie v_0 jest prędkością na granicy ośrodków, stąd $v(y) = \dfrac{v_0 n}{n_0}$, $v^2(y) = v_0^2 - \dfrac{v_0^2 y}{H}$. Widzimy, że przy zadanym współczynniku załamania punkt materialny porusza się jak pod działaniem stałej siły skierowanej pionowo w dół. Z zasady zachowania energii mamy bowiem: $\dfrac{mv^2(y)}{2} = \dfrac{mv_0^2}{2} - may$, gdzie a jest stałym przyspieszeniem cząstki i wynosi $a = \dfrac{v_0^2}{2H}$. Korzystając ze wzorów dla rzutu ukośnego w polu stałej siły, otrzymujemy dla $\alpha_0 = \pi/4$ maksymalną odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia z ośrodka niejednorodnego $l_{\max} = \dfrac{2v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{a}$. Promień nie może przy tym przejść do górnego ośrodka jednorodnego, musi więc być spełniony warunek $h \geqslant \dfrac{H}{2}$, czyli $n_0 \geqslant \sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia odpowiada takiemu kątowi α_0, dla którego promień jest styczny do górnej granicy rozdziału ośrodków: $n_0\cos\alpha_0 = n(h)\cos 0$, stąd $\cos\alpha_0 = \sqrt{1 - \dfrac{h}{H}}$.

Klub 44

$\sqrt[\otimes]{\oint!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2015

Zadania z matematyki nr 707, 708

Redaguje Marcin E. KUCZMA

707. Niech $W(x,y,z) = 1 + 9x(x-y)(x-z)$. Znaleźć wszystkie trójki liczb zespolonych a,b,c, dla których spełnione jest równanie $W(a,b,c) = W(b,c,a) = W(c,a,b) = 0$.

708. Dane są dodatnie liczby całkowite nieparzyste k, m. Niech $d = \mathrm{nwd}(k+1,\ m-1)$, $e = \mathrm{nwd}(k-1,\ m+1)$, $f = \mathrm{nww}(d,e)$. Dowieść, że liczba $k^m + m^k$ dzieli się przez f.

Zadanie 708 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

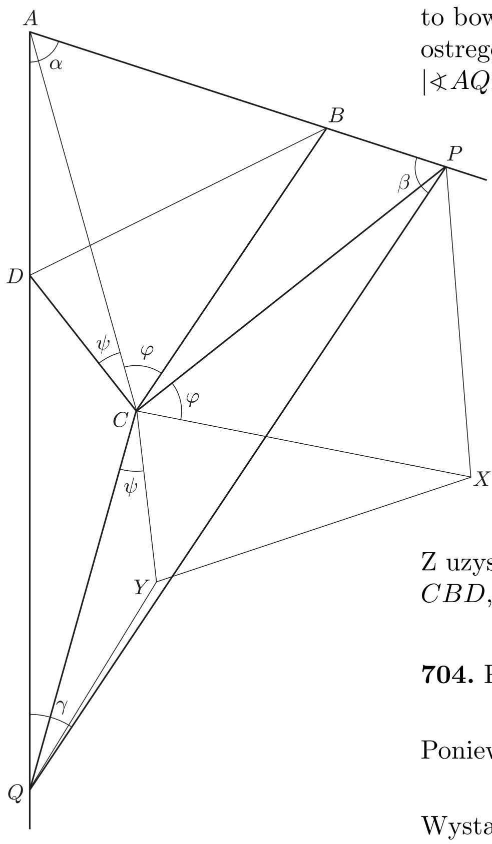
Przypominamy treść zadań:

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q, leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$, $AD^{\rightarrow}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD.

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B, takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a,b,c,d spełniona jest nierówność

$$A\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2) \leqslant ab+2bc+cd \leqslant B\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

703. Z warunków zadania wynika, że punkt C leży wewnątrz trójkąta APQ (jest to bowiem środek okręgu opisanego na tym trójkącie, leżący w obrębie kąta ostrego PAQ). Oznaczmy kąty tego trójkąta: $|\sphericalangle PAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle APQ| = \beta$, $|\sphericalangle AQP| = \gamma$; ponadto niech $|\sphericalangle ACB| = \varphi$, $|\sphericalangle ACD| = \psi$; z założenia $\alpha = \varphi + \psi$.



Na bokach CP i CQ czworokąta (wklęsłego) $APCQ$ budujemy, po zewnętrznej jego stronie, trójkąty CPX i CQY, przystające odpowiednio do trójkątów CAB i CAD:

$$|PX|{=}|AB|,\quad |CX|{=}|CB|,\quad |\sphericalangle PCX|{=}\varphi,$$
$$|QY|{=}|AD|,\quad |CY|{=}|CD|,\quad |\sphericalangle QCY|{=}\psi$$

(rysunek przedstawia sytuację, gdy punkt B leży między A i P, zaś D między A i Q; ale przy innym uporządkowaniu punktów, na jednej lub drugiej z tych prostych, rozumowanie nie wymaga żadnych zmian). Skoro

$$|\sphericalangle ACX| {=} |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle PCX| = 2\gamma + \varphi,$$
$$|\sphericalangle ACY| {=} |\sphericalangle ACQ| + |\sphericalangle QCY| = 2\beta + \psi,$$

zatem

$$|\sphericalangle XCY| = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma - (\varphi+\psi) = 2\alpha - (\varphi+\psi) = \alpha.$$

Z uzyskanych równości wynika, że trójkąt CXY jest przystający do trójkąta CBD, wobec czego $|XY| = |BD|$, i otrzymujemy tezę zadania:

$$|AB| + |BD| + |DA| = |PX| + |XY| + |YQ| \geqslant |PQ|.$$

704. Przyjmijmy oznaczenia: $q = \sqrt{a^2+d^2}$, $r = \sqrt{b^2+c^2}$,

$$S = ab + 2bc + cd, \qquad U = a^2+b^2+c^2+d^2 = q^2 + r^2.$$

Ponieważ $|2bc| \leqslant r^2$ oraz $|ab+cd| \leqslant qr$ (nier. Cauchy'ego–Schwarza), zatem

$$|S| \leqslant r^2 + qr = r(q+r).$$

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $S \neq 0$ (więc $r(q+r) > 0$). Wówczas

$$\frac{U}{|S|} \geqslant \frac{q^2+r^2}{r(q+r)} = \frac{q-r}{r} + \frac{2r}{q+r} = -2 + \frac{q+r}{r} + \frac{2r}{q+r} =$$
$$= -2 + \left(\frac{q+r}{\sqrt{2}\,r} + \frac{\sqrt{2}\,r}{q+r}\right)\sqrt{2} \geqslant -2 + 2\sqrt{2}.$$

Wobec tego

$$\frac{|S|}{U} \leqslant \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

To znaczy, że postulowana nierówność podwójna $AU \leqslant S \leqslant BU$ zachodzi ze stałymi $A = -(\sqrt{2}+1)/2$, $B = (\sqrt{2}+1)/2$ (dla $S = 0$ oczywiście też).

Biorąc teraz np. $b = c = 1$, $a = d = \sqrt{2}-1$, uzyskujemy równość $S = BU$ (z podaną stałą B); zaś zmieniając znak w a i c, dostajemy równość $S = AU$ (z podaną stałą A). Znalezione stałe są więc optymalne.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 697 ($WT = 1{,}72$) i 698 ($WT = 2{,}03$) z numeru 3/2015

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garncarek	Opole	41,73
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Paweł Najman	Kraków	36,92
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89