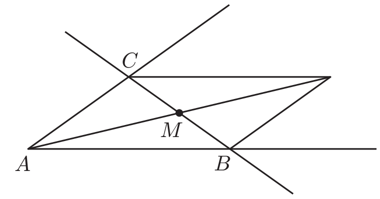
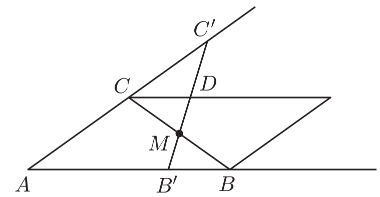
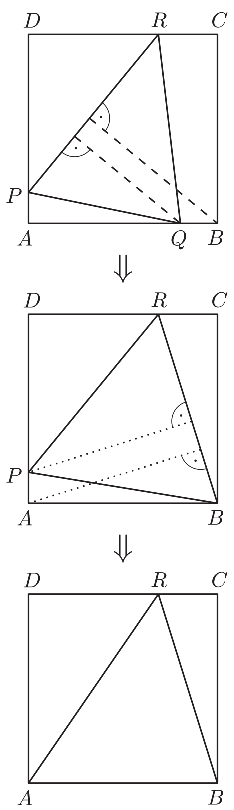


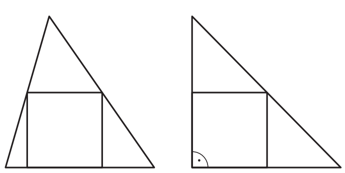
Rys. 1

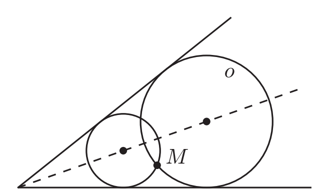


Rys. 2



Rys. 3


Rys. 4



Rys. 5

Zabawy w kącie

Jarosław GÓRNICKI Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

W każdym zjawisku przyrody można dostrzec dążenie do osiągnięcia jakiegoś maksimum lub minimum. Umiejętność wyznaczania wartości ekstremalnych nie powinna więc być niczym niezwykłym. Oto zadanie z niespodzianką, które proponuję rozwiązać samodzielnie (wrócimy do niego na końcu artykułu):

Zadanie 1. *Przez dany punkt leżący we wnętrzu kąta poprowadzić prostą o najkrótszym odcinku między jego ramionami.*

Tymczasem rozważymy kilka innych ciekawych problemów.

Zadanie 2. *Przez dany punkt M leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku A poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach B i C, wyznacza trójkąt ABC o najmniejszym polu.*

Rozwiązanie. Wykreślamy równoległobok, którego dwa boki leżą na ramionach kąta o wierzchołku A, a jego przekątne przecinają się w punkcie M. Przekątna tego równoległoboku, która przecina ramiona kąta (w punktach B i C, rys. 1), wyznacza trójkąt ABC o najmniejszym polu.

Jeśli $B'C' \neq BC$ jest inną prostą przechodzącą przez punkt M (na przykład taką, że $|AB'| < |AB|$, rys. 2), to, korzystając z przystawania trójkątów $B'BM$ i DCM, mamy:

$$\begin{aligned}|\triangle AB'C'| &= |AB'MC| + |\triangle CMD| + |\triangle CDC'| > \\ &> |AB'MC| + |\triangle CMD| = |AB'MC| + |\triangle B'MB| = |\triangle ABC|.\end{aligned}$$

Zadanie 3. *Wykazać, że maksymalne pole trójkąta zawartego w kwadracie jednostkowym jest równe $\frac{1}{2}$, a minimalne pole trójkąta zawierającego kwadrat jednostkowy jest równe 2.*

Rozwiązanie. Pierwsza część jest łatwa. Weźmy kwadrat jednostkowy $ABCD$ i w nim trójkąt PQR, którego wierzchołki leżą na różnych bokach kwadratu tak, że $P, Q, R \notin \{A, B, C, D\}$. Wówczas trójkąt PQR łatwo zastąpić trójkątem o większej wysokości, czyli większym polu (rys. 3):

$$|\triangle PQR| < |\triangle PBR| < |\triangle ABR| = \frac{1}{2}.$$

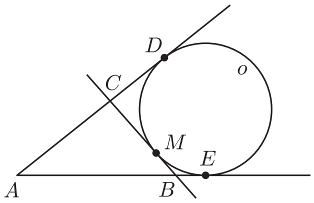
Druga część jest konsekwencją zadania 2. Jeśli trójkąt ma najmniejsze pole wśród trójkątów zawierających kwadrat (jednostkowy), to środki boków tego trójkąta muszą należeć do boków kwadratu. Oznacza to, że jeden bok kwadratu musi należeć do boku trójkąta, a przeciwległy bok kwadratu łączy środki boków trójkąta (rys. 4). Nietypowe w tym zadaniu jest to, że istnieje wiele różnych realizacji warunków ekstremalnych.

Zadanie 4. *Przez dany punkt M leżący we wnętrzu kąta o wierzchołku A poprowadzić prostą, która, przecinając ramiona kąta w punktach B i C, wyznacza trójkąt ABC o najmniejszym obwodzie.*

Rozwiązanie. W kąt o wierzchołku A wpisujemy dwa okręgi przechodzące przez punkt M (rys. 5). Do większego z nich, powiedzmy o, w punkcie M wyznaczamy styczną, która przecina ramiona kąta w punktach B i C (rys. 6). Tak utworzony trójkąt ABC spełnia warunki zadania i ma najmniejszy obwód równy $|AD| + |AE|$, gdzie D i E to punkty styczności okręgu o z ramionami kąta (jest tak, bo $|MC| = |CD|$ i $|MB| = |BE|$).

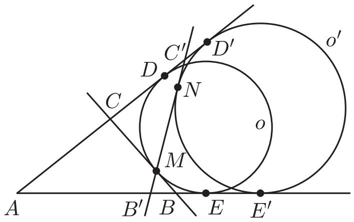
Jeśli $B'C' \neq BC$ jest inną prostą zawierającą punkt M, to okrąg o' dopisany do trójkąta $AB'C'$ jest styczny do ramion kąta w punktach D' i E' oraz do odcinka $B'C'$ w punkcie $N \neq M$ (rys. 7). Ponieważ punkt M leży na zewnątrz okręgu dopisanego o', więc okrąg o' ma większy promień niż okrąg o i obwód trójkąta $AB'C'$ jest równy $|AD'| + |AE'| > |AD| + |AE|$.

Odrobina geometrii pozwoliła nam sprawnie rozwiązać trzy zadania. Kto próbował rozwiązać zadanie 1, ten wie, że jest ono trudniejsze.



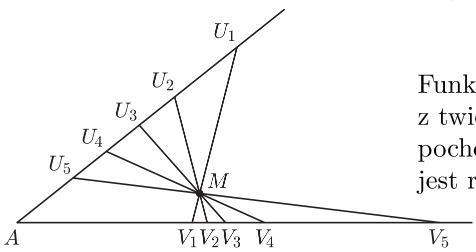
Rys. 6

Rozwiązanie zadania 1. Rozpoczniemy od wykazania, że istnieje najkrótszy odcinek realizujący warunki zadania. Niech M będzie danym punktem we wnętrzu kąta o wierzchołku A. Odcinek, którego końce ślizgają się po ramionach kąta od położenia U_1V_1 przez U_2V_2, U_3V_3, itd. do położenia U_5V_5 (rys. 8) i przechodzący przez punkt M, zmienia swoją długość w sposób ciągły. Ponieważ długość ta najpierw maleje, a potem wzrasta, więc wśród rozpatrywanych odcinków istnieje taki odcinek UV, którego długość jest najmniejsza.



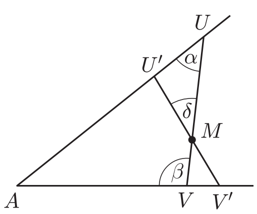
Rys. 7

Spróbujmy ten odcinek scharakteryzować. Niech $U'V' \neq UV$ będzie innym odcinkiem zawierającym punkt M i łączącym ramiona kąta. Niech $|\sphericalangle AUM| = \alpha$, $|\sphericalangle MVA| = \beta$, $0 < \alpha + \beta < \pi$, a mniejszy z kątów o wierzchołku M (między odcinkami UV, $U'V'$) ma miarę δ (rys. 9). Dla małych kątów $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ rozważmy funkcję
$$f(\delta) = |U'V'| = |U'M| + |MV'|.$$
Z twierdzenia sinusów, zastosowanego do trójkątów UMU' i VMV', mamy
$$\frac{|MU'|}{\sin\alpha} = \frac{|MU|}{\sin(\pi - (\alpha+\delta))}, \qquad \frac{|MV'|}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{|MV|}{\sin(\pi - \delta - (\pi - \beta))},$$
więc
$$f(\delta) = |MU|\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)} + |MV|\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\delta)}.$$



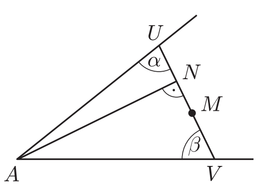
Rys. 8

Funkcja ta jest różniczkowalna, osiąga minimum dla $\delta = 0$, więc zgodnie z twierdzeniem Fermata spełnia warunek $f'(0) = 0$, który po obliczeniu pochodnej i niezbyt skomplikowanych przekształceniach trygonometrycznych jest równoważny warunkowi
$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$
Jaki jest sens geometryczny tego warunku? Niech N będzie rzutem (prostopadłym) wierzchołka A na odcinek UV (rys. 10). Wyznaczając $\operatorname{ctg}\beta$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ z trójkątów prostokątnych ANU i ANV, łatwo stwierdzamy, że $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{|NV|}{|NU|}$. Oznacza to, że $|MU| = |NV|$ i $|MV| = |NU|$, czyli punkt N jest symetryczny do punktu M względem środka odcinka UV.



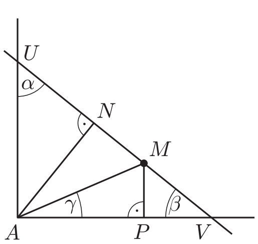
Rys. 9

Niespodzianką (trudnością) w tym zadaniu jest to, że – poza szczególnymi przypadkami – odcinka UV nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Dlaczego tak jest? Niech kąt przy wierzchołku A będzie prosty. Wtedy, przy oznaczeniach takich jak na rysunku 11, jeśli UV jest najkrótszym odcinkiem łączącym ramiona kąta i przechodzącym przez punkt M, to
$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \operatorname{ctg}^2\beta.$$



Rys. 10

Z twierdzenia Talesa $\frac{|MU|}{|PA|} = \frac{|MV|}{|PV|}$, więc $\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{|PA|}{|PV|}$. Ponieważ $\frac{|PA|}{|MP|} = \operatorname{ctg}\gamma$, $\frac{|PV|}{|MP|} = \operatorname{ctg}\beta$, więc
$$\frac{|MU|}{|MV|} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta},$$
gdzie γ jest miarą kąta MAP. W konsekwencji $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}^2\beta$, więc $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\gamma}$. Gdyby istniała konstrukcja najkrótszego odcinka UV, to, biorąc $|AP| = 2$ i $|MP| = 1$, otrzymamy odcinek $|PV| = \sqrt[3]{2}$, który umożliwia wykonanie zadania podwojenia sześcianu jednostkowego. Wystarczy teraz wiedzieć (!), że jest to niemożliwe do zrealizowania za pomocą cyrkla i linijki (patrz np. M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, *Biblioteczka Delty* 1, WSiP, Warszawa 1979).



Rys. 11

Puentą niech będą słowa Adama Mickiewicza

PRAKTYKA

„Na co będą potrzebne, pytało pacholę –
Trójkąty, czworoboki, koła, parabole?"
„Że potrzebne – rzekł mędrzec – musisz teraz wierzyć;
Na co potrzebne, zgadniesz, gdy zaczniesz świat mierzyć."