

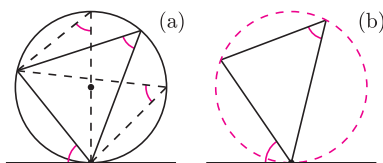
del oia

81

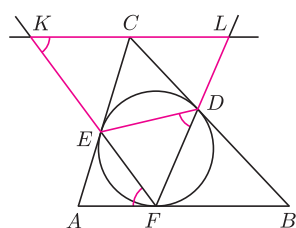
Styczna i cięciwa

Joanna JASZUŃSKA

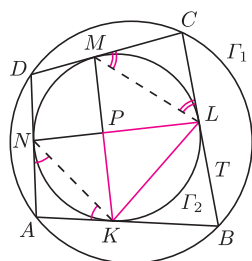
Twierdzenie o stycznej i cięciwie (*) jest niezwykle prostym, a zarazem ogromnie przydatnym faktem z elementarnej geometrii. Głosi ono, że *kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą przechodzącą przez punkt styczności równy jest kątowi wpisanemu w ten okrąg, opartemu na odpowiednim łuku* – rysunek 1(a). Dla dowodu wystarczy rozważyć ten spośród kątów wpisanych, którego ramię jest prostopadłe do stycznej.



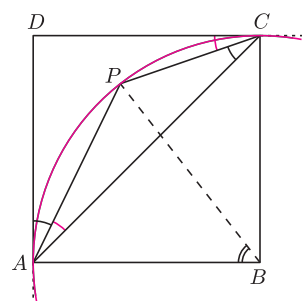
Rys. 1(a) i (b). Twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne do niego.



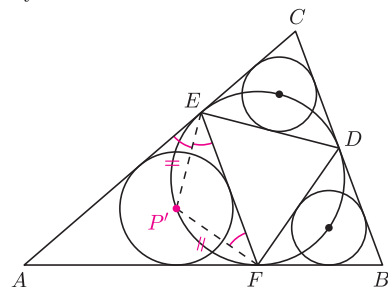
Rys. 2



Rys. 3. $\alpha = \sphericalangle AKN = \sphericalangle ANK$,
 $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$.



Rys. 4



Rys. 5

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do (*): jeśli odpowiednie kąty są równe (rys. 1(b)), to okrąg opisany na trójkącie jest styczny do danej prostej.

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Prosta równoległa do AB , przechodząca przez punkt C , przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L . Udowodnij, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

2. Czworokąt T jest wpisany w okrąg Γ_1 oraz opisany na okręgu Γ_2 , przy czym K, L, M, N są kolejnymi punktami styczności T z Γ_2 . Wykaż, że $KM \perp LN$.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$ i taki punkt P w jego wnętrzu, dla którego $\sphericalangle CAP = \sphericalangle DCP = 19^\circ$. Wyznacz $\sphericalangle ABP$.

4. Okrąg Γ , wpisany w trójkąt ABC , jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Wykaż, że środki P, Q, R okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE leżą na okręgu Γ .

Rozwiązania

R1. Korzystając kolejno z równoległości prostych AB i KL oraz z twierdzenia (*), uzyskujemy $\sphericalangle EKL = \sphericalangle EFA = \sphericalangle EDF$ (rys. 2). Stąd $\sphericalangle EKL + \sphericalangle EDL = \sphericalangle EKL + 180^\circ - \sphericalangle EDF = 180^\circ$, co kończy dowód. \square

R2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Skoro czworokąt T jest wpisany w okrąg, to $180^\circ = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\gamma$, więc $\alpha + \gamma = 90^\circ$.

Jednocześnie, na mocy twierdzenia (*) dla okręgu Γ_2 , mamy $\sphericalangle KLN = \alpha$ oraz $\sphericalangle LKM = \gamma$. Wobec tego $\sphericalangle KPL = 180^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ$, co kończy dowód. \square

R3. Na mocy danej równości kątów oraz twierdzenia odwrotnego do (*), prosta CD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie PAC (rys. 4). Wobec tego środek tego okręgu leży na prostej BC (bo $BC \perp CD$). Analogicznie prosta AD także jest styczna do tego okręgu, gdyż $\sphericalangle DAP = \sphericalangle ACP = 26^\circ$, zatem środek rozważanego okręgu leży też na prostej AB . Stąd jest nim punkt B .

Kąt ABP jest więc kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ACP , zatem $\sphericalangle ABP = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$. \square

R4. Oznaczmy środek krótszego łuku EF okręgu Γ przez P' (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle P'EF = \sphericalangle P'FE = \sphericalangle P'EA$, przy czym druga równość wynika z twierdzenia (*). Wobec tego P' leży na dwusiecznej kąta AEF . Analogicznie dla kąta AFE , więc $P' = P$. Dowód dla punktów Q i R przebiega podobnie. \square

Zadania domowe

5. Udowodnij twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne.

6. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B . Proste styczne do tych okręgów w punkcie A przecinają je w drugich punktach C i D . Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.

7. Z punktu P poprowadzono prostą przecinającą dany okrąg Γ w punktach A i B oraz prostą styczną do Γ w punkcie C . Wykaż, że $PA \cdot PB = PC^2$.

8. Okrąg Γ jest styczny do prostej k w punkcie D , cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do k , punkt C należy do prostej k . Proste AC i BC przecinają okrąg Γ w drugich punktach E i F . Wykaż, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD .

9. W sytuacji z zadania 4 wykaż, że proste DP, EQ, FR przecinają się w jednym punkcie J oraz że punkty F i J są symetryczne względem prostej PQ .