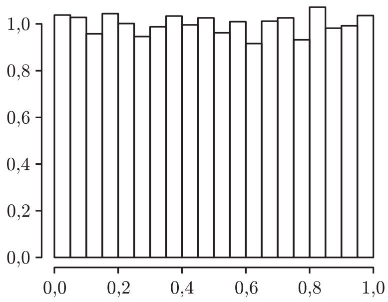
wykazać, że otrzymywane wyniki tworzą ciąg zmiennych wymienialnych. Aby się o tym przekonać, wystarczy w tym przypadku stwierdzić, że zamiana ostatnich dwóch wyników w dowolnym ciągu początkowych rezultatów nie zmieni nam prawdopodobieństwa jego uzyskania pod warunkiem wcześniejszych wyników. Niech zatem $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ będzie ciągiem n pierwszych wyników. Jeśli $x_{n-1} = x_n$, postulowana równość jest oczywista. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem $x_{n-1} = 1 = 1 - x_n$ i wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}) = \\
&\qquad = \frac{1+s_{n-2}}{n}\left(1 - \frac{2+s_{n-2}}{n+1}\right) = \frac{(n-1-s_{n-1})(1+s_{n-2})}{n(n+1)} = \\
&\qquad = \left(1 - \frac{1+s_{n-2}}{n}\right)\frac{1+s_{n-2}}{n+1} = \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{n-1} = x_n, X_n = x_{n-1} \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Zgodnie z naszymi wcześniejszymi obserwacjami oznacza to ich niezależność i ten sam rozkład pod warunkiem znajomości (istniejącej) granicy $\Theta = \lim \sum_1^n X_i/n$ – gdyby tajemniczy cudzoziemiec zdradził nam jej wartość θ, to szansę na sukces w **każdej** kolejnej rundzie ocenialibyśmy właśnie na θ. Wydaje się to dosyć zaskakujące, zwłaszcza jeśli przeprowadzimy podobne rozumowanie przy założeniu, że początkowo w urnie znajdowały się jedna kula biała i 100 czarnych oraz dostaliśmy informację $\Theta = 0{,}999$ – choć serce drżałoby z trwogi, zimna kalkulacja nakazywałaby już w pierwszej rundzie stawiać na szali zwycięstwa wszystkie nasze oszczędności, dom, psa i ubranie, gdyż szansa na sukces i tak wynosiłaby 99,9%! Cały sekret tkwi w fakcie, że pozornie duże prawdopodobieństwo porażki w pierwszym losowaniu jest „pożerane” przez informację o tak dużej (lecz również tak mało prawdopodobnej) wartości Θ. Przy naszych założeniach prawdopodobieństwo zdarzenia, że Θ jest nie mniejsze od 0,999, jest rzędu… 10^{-297}. Nie trzeba wielkiej przenikliwości umysłu, by stwierdzić, że w tej sytuacji nasz cudzoziemiec z pewnością nie jest żadnym Bułhakowowskim Wolandem, a jedynie zwykłym hochsztaplerem. No, może nie *z pewnością*, a *prawdopodobnie*, więc może na wszelki wypadek uważajmy na plamy rozlanego oleju…

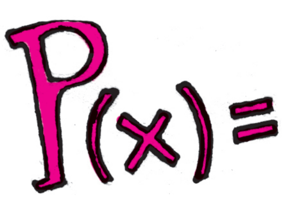
Okazuje się, że jeśli na początku w urnie znajdowało się b kul białych i c czarnych, to zmienna Θ ma rozkład beta o parametrach b i c. W szczególności dla $b = c = 1$ (i tylko w tym przypadku) jest to rozkład jednostajny na $[0, 1]$, o czym przyjemnie jest się przekonać, przeprowadzając komputerową symulację opisanego procesu. Poniżej znajduje się histogram 10000 wartości średniej liczby sukcesów w 1000 początkowych rundach.



Matematyka jest jedna: wielomiany mogą wszystko

*Tomasz KOBOS**

Jednomiany postaci $f(x) = x^n$ są jednymi z pierwszych funkcji rzeczywistych, z którymi mamy do czynienia w naszym matematycznym życiu. Odrobinę później poznajemy ich kombinacje o współczynnikach rzeczywistych, czyli tytułowe **wielomiany**. Jest więc to pojęcie elementarne, które powinno być doskonale znane każdemu maturzyście. Tym bardziej może zadziwiać, jak często wielomiany i ich podstawowe własności stanowią klucz do wielu trudnych problemów, które na pozór nic z wielomianami wspólnego nie mają. Zaprezentujemy to na przykładach z algebry, teorii liczb i kombinatoryki.



Zadanie 1. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$a+b+c+d > 0, \qquad ab+ac+ad+bc+bd+cd > 0,$$
$$abc+abd+acd+bcd > 0, \qquad abcd > 0.$$

Wykazać, że $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

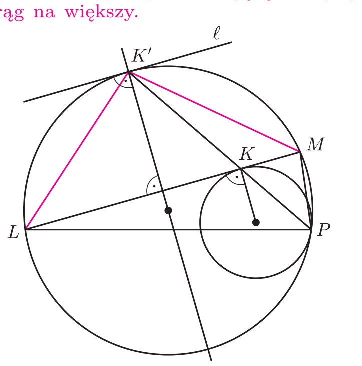
Rozwiązanie. Czytelnik doświadczony w dziedzinie rozwiązywania problemów olimpijskich z całą pewnością natychmiast skojarzy dany warunek ze wzorami Viète'a. Jest to istotnie dobry trop. Rozważmy bowiem wielomian $P(x)$, którego pierwiastkami są liczby a, b, c, d, czyli

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s.$$

Z danych założeń i wspomnianych wzorów Viète'a wynika bezpośrednio, że $p, q, r, s > 0$. Jeżeli więc $x \leqslant 0$, to oczywiście $P(x) > 0$. Widzimy zatem, że żaden z pierwiastków P nie może być liczbą ujemną, co kończy rozwiązanie.

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Rozwiązanie zadania M 1468.
Rozważmy jednokładność o środku w punkcie P, przeprowadzającą mniejszy okrąg na większy.



Obrazem prostej LM jest prosta ℓ, równoległa do LM i styczna do większego okręgu w pewnym punkcie K' (obrazie punktu K). Punkty P, K, K' są współliniowe. Ponieważ $\ell \parallel LM$, punkty L i M są symetryczne względem średnicy większego okręgu przechodzącej przez K' i zachodzi równość $K'M = K'L$, więc $\sphericalangle MPK' = \sphericalangle K'PL$.

Powyższy przykład z całą pewnością nie był zaskakujący dla ekspertów, gdyż pomysł skorzystania z wielomianu pomocniczego nasuwał się praktycznie sam. Kolejne zadanie jest dużo bardziej intrygujące.

Zadanie 2. Udowodnić, że liczba

$$\sqrt{1007^2+1}+\sqrt{1008^2+1}+\ldots+\sqrt{2014^2+1}$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie. Oznaczmy sumę daną w zadaniu przez s. Udowodnimy najpierw, że liczba s nie jest całkowita. Zauważmy w tym celu, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$n < \sqrt{n^2+1} < n + \frac{1}{n+1}.$$

Pierwsza z nich jest oczywista, zaś druga po podniesieniu do kwadratu redukuje się do

$$1 < \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2},$$

co jest prawdą, gdyż $2n \geqslant n+1$.

W szczególności dla dowolnego $n \in \{1007, 1008, \ldots, 2014\}$ prawdziwe są nierówności

$$n < \sqrt{n^2+1} < n + \frac{1}{1008}.$$

Wynika stąd, że suma s nie jest liczbą całkowitą, gdyż część ułamkowa każdego z jej 1008 składników jest mniejsza niż $\frac{1}{1008}$. Dowodzi to naszego stwierdzenia.

Może się wydawać, że do osiągnięcia celu jest jeszcze daleko. Liczba, która nie jest całkowita, nie musi przecież od razu być niewymierna. W tym jednak momencie można zacząć podejrzewać, jaką rolę odegrają własności wielomianów. W następnym kroku udowodnimy bowiem, że istnieje wielomian unormowany P o współczynnikach całkowitych, taki, że $P(s) = 0$. Stąd już natychmiast otrzymamy tezę zadania, gdyż z **twierdzenia o pierwiastku wymiernym** wynika, że każdy wymierny pierwiastek wielomianu P jest również całkowity. W szczególności, skoro $s \notin \mathbb{Z}$, to tym samym $s \notin \mathbb{Q}$.

Twierdzenie o pierwiastku wymiernym głosi, że jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (zapisana w postaci nieskracalnej) jest pierwiastkiem wielomianu

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

o współczynnikach całkowitych, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$. W szczególności, jeżeli współczynnik wiodący wielomianu P jest równy 1, to dowolny pierwiastek tego wielomianu, który jest liczbą wymierną, jest również liczbą całkowitą.

Za pomocą indukcji po n wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: dla dowolnych liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieje unormowany wielomian P o współczynnikach całkowitych, dla którego

$$P(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}) = 0.$$

Gdy $n = 1$, wystarczy przyjąć $P(x) = x^2 - a_1$. Załóżmy więc, że $n \geqslant 2$ oraz istnieje wielomian unormowany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla którego $P(s - \sqrt{a_n}) = 0$, gdzie $s = \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}$. Przyjmijmy, że stopień wielomianu P to r i że P zapisuje się w postaci $P(x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i x^i$. W szczególności

$$0 = P(s-\sqrt{a_n}) = (s-\sqrt{a_n})^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i (s-\sqrt{a_n})^i.$$

Po rozwinięciu wszystkich potęg ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy równanie postaci

$$s^r + Q(s) + \sqrt{a_n}R(s) = 0,$$

gdzie Q i R są wielomianami o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego niż r. Przenosząc składnik $\sqrt{a_n}R(s)$ na drugą stronę i podnosząc obie strony równości do kwadratu, dostajemy

$$s^{2r} + 2s^r Q(s) + (Q(s))^2 = a_n (R(s))^2.$$

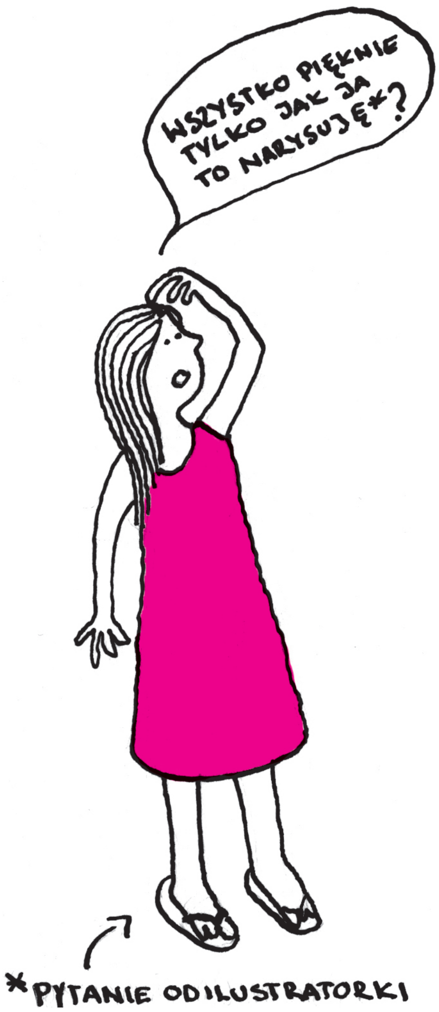
W szczególności liczba s jest pierwiastkiem unormowanego wielomianu

$$x^{2r} + 2x^r Q(x) + (Q(x))^2 - a_n (R(x))^2.$$

Kończy to zarówno dowód indukcyjny, jak i rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie zadania F 887.
Powietrze ma mniejszy współczynnik załamania niż woda, co oznacza, że nie zachodzi całkowite odbicie promieni padających na powierzchnię wody. Zatem w rozważanych warunkach rybka zawsze może zobaczyć wędkarza.

O trudności kolejnego zadania niech świadczy fakt, że na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej zostało ono rozwiązane jedynie przez 5 osób.



Zadanie 3. Rozważmy zbiór
$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$
złożony z $(n+1)^3 - 1$ punktów w przestrzeni. Wyznaczyć minimalną liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera zbiór S, ale nie zawiera punktu $(0, 0, 0)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $3n$ płaszczyzn o równaniach $x = i$, $y = i$, $z = i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ spełnia żądany warunek. Wykażemy, że $3n$ jest minimalną liczbą o tej własności.

Załóżmy więc, że suma mnogościowa pewnych N płaszczyzn danych równaniami
$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad \text{gdzie } 1 \leqslant i \leqslant N,$$
pokrywa zbiór S, ale nie zawiera punktu $(0, 0, 0)$. Rozważmy wielomian trzech zmiennych $P(x, y, z)$ dany jako
$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i).$$
Jest to wielomian łącznego stopnia N, który spełnia warunek $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ dla $(x_0, y_0, z_0) \in S$ oraz $P(0, 0, 0) \neq 0$.

Za pomocą wielomianu P udało się nam przetłumaczyć kombinatoryczny warunek dotyczący płaszczyzn na język algebry. Dzięki temu możemy wykorzystać jej narzędzia, zapominając o kombinatorycznej naturze zadania.

Dla dowolnego wielomianu trzech zmiennych $Q(x, y, z)$ określmy operację Δ_x zdefiniowaną jako
$$\Delta_x Q(x, y, z) = Q(x + 1, y, z) - Q(x, y, z).$$
W analogiczny sposób definiujemy operację Δ_y oraz Δ_z.

Za pomocą nietrudnego rachunku na współczynnikach sprawdzimy najpierw, że operacja Δ_x zmniejsza łączny stopień wielomianu co najmniej o 1. Załóżmy bowiem, że stopień pewnego wielomianu $Q(x, y, z)$ to $k + l + m$, przy czym w rozwinięciu Q pojawia się jednomian postaci $x^k y^l z^m$. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, uzyskujemy
$$(x + 1)^k y^l z^m - x^k y^l z^m = y^l z^m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i.$$
Otrzymaliśmy więc sumę jednomianów o łącznym stopniu nieprzekraczającym $k + l + m - 1$. Stosując to samo rozumowanie do każdego jednomianu postaci $x^p y^q z^r$, który pojawia się w rozwinięciu Q i spełnia $p + q + r = k + l + m$, widzimy, że operacja Δ_x redukuje wszystkie jednomiany o łącznym stopniu $k + l + m$. Potwierdza to nasze stwierdzenie.

Zauważmy, że skoro wielomian $P(x, y, z)$ zeruje się dla dowolnej trójki (x_0, y_0, z_0) spełniającej $0 \leqslant y_0, z_0 \leqslant n$ oraz $1 \leqslant x_0 \leqslant n$, to $\Delta_x P(x, y, z)$ zeruje się dla dowolnej trójki (x_0, y_0, z_0), która spełnia $0 \leqslant y_0, z_0 \leqslant n$ oraz $1 \leqslant x_0 \leqslant n - 1$. Jednocześnie, mamy $\Delta_x P(0, 0, 0) = P(1, 0, 0) - P(0, 0, 0) = -P(0, 0, 0) \neq 0$.

Powtarzając operację Δ_x aż $(n-1)$-krotnie, otrzymujemy wielomian $\Delta_x^{n-1} P(x, y, z)$, który zeruje się dla dowolnej trójki postaci $(1, y_0, z_0)$, gdzie $0 \leqslant y_0, z_0 \leqslant n$, oraz nie zeruje się dla $(0, 0, 0)$. Używając więc operacji Δ_x, już ostatni raz dostajemy
$$\begin{aligned}\Delta_x^n P(0, 0, 0) &= \Delta_x^{n-1} P(1, 0, 0) - \Delta_x^{n-1} P(0, 0, 0) = \\ &= -\Delta_x^{n-1} P(0, 0, 0) \neq 0.\end{aligned}$$
Wielomian, który otrzymaliśmy z wielomianu P po n-krotnym zastosowaniu operacji Δ_x, nie zeruje się więc w punkcie $(0, 0, 0)$, ale zeruje się dla dowolnego punktu postaci $(0, y_0, z_0)$ gdzie $0 \leqslant y_0, z_0 \leqslant n$ i co najmniej jedna z liczb y_0, z_0 jest różna od zera.

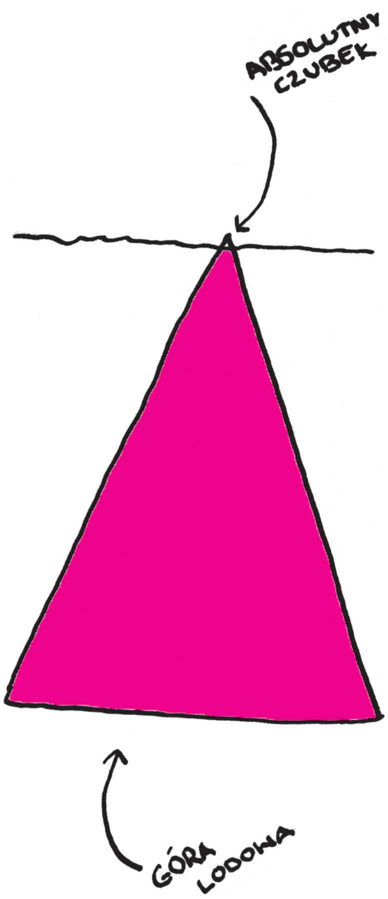
Możemy zatem powtórzyć cały powyższy proces, tym razem względem zmiennej y, startując od wielomianu otrzymanego w ostatnim kroku. Wielomian $\Delta_y^n \Delta_x^n P(x, y, z)$ zeruje się więc dla dowolnej trójki postaci $(0, 0, z_0)$, gdzie

Rozwiązanie zadania F 888.
Kierunki biegu fali dźwiękowej w powietrzu i w wodzie spełniają związek
$$\sin\alpha = \frac{v_p}{v_w} \sin\beta,$$
gdzie α jest kątem padania na powierzchnię wody, zaś β – kątem załamania w wodzie. W skrajnym przypadku $\sin\beta = 1$, co daje
$$\sin\alpha = \frac{v_p}{v_w} = n.$$
Dla danego h maksymalna odległość, przy której dźwięk nie ulegnie całkowitemu odbiciu od powierzchni wody, to
$$h \operatorname{tg}\alpha = h\frac{n}{\sqrt{1 - n^2}}.$$
Ale te wzory obowiązują przy założeniu, że dźwięk w ośrodku jednorodnym rozchodzi się prostoliniowo (tzn. że można pominąć efekty falowe, np. dyfrakcję) i są prawdziwe dla odległości znacznie większych niż długość fali. Ponieważ w powietrzu długość fali dźwiękowej mówiącego człowieka może dochodzić do kilkudziesięciu centymetrów, efektów związanych z falową naturą dźwięku nie można pominąć. Zatem rację ma Kasia.

$1 \leqslant z_0 \leqslant n$, ale nie dla trójki $(0,0,0)$. Ostatecznie już, rozumując w ten sam sposób względem zmiennej z, dochodzimy do wniosku, że wielomian $\Delta_z^n \Delta_y^n \Delta_x^n P(x,y,z)$ nie zeruje się w punkcie $(0,0,0)$.

Nie jest to zatem wielomian zerowy. Wcześniej udowodniliśmy jednak, że dowolna z operacji Δ redukuje łączny stopień wielomianu co najmniej o 1. Stopień wielomianu $\Delta_z^n \Delta_y^n \Delta_x^n P(x,y,z)$ nie przekracza zatem $N - 3n$. Stąd $N \geqslant 3n$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

Kolejny problem jest jednym z najbardziej zadziwiających, które autor artykułu napotkał w życiu. Aby w pełni go docenić, zdecydowanie należy się z nim wypróbować wcześniej na własną rękę – do czego bardzo zachęcamy!



Zadanie 4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dwoma różnymi (czyli różniącymi się nie tylko porządkiem) zestawami liczb całkowitych dodatnich. Udowodnić, że jeżeli zestaw liczb postaci $a_i + a_j$, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$ pokrywa się z zestawem $b_i + b_j$, dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$, to n jest potęgą liczby 2.

Rozwiązanie. Zadanie może wydawać się całkiem tajemnicze. W naturalny sposób nasuwają się dwa pytania: dlaczego akurat potęga liczby 2 i gdzie tu znaleźć wielomiany? Jako rozgrzewkę możemy zaproponować Czytelnikowi proste ćwiczenie: dla dowolnej potęgi liczby 2 skonstruować różne zestawy liczb o żądanej własności.

Odpowiedzmy zatem na drugie. Rozważmy bowiem wielomiany

$$f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \ldots + x^{b_n}.$$

Kluczowa obserwacja polega na połączeniu danego warunku z operacją brania kwadratu wielomianu. Zauważmy bowiem, że

$$\begin{aligned}(f(x))^2 - f(x^2) &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j} - \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} = \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j} = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j} = (g(x))^2 - g(x^2).\end{aligned}$$

Przypatrzmy się teraz wielomianowi $f(x) - g(x)$. Nie jest to wielomian zerowy oraz $f(1) - g(1) = n - n = 0$, a więc liczba 1 jest jego pierwiastkiem. Oznaczmy przez k krotność owego pierwiastka, czyli $f(x) - g(x) = (x-1)^k h(x)$ dla pewnego wielomianu h, takiego, że $h(1) \neq 0$. Wówczas

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2-1)^k Q(x^2)}{(x-1)^k Q(x)} = (x+1)^k \frac{Q(x^2)}{Q(x)}.$$

Podstawiając $x = 1$ w powyższej równości, dostajemy

$$2n = f(1) + g(1) = 2^k,$$

skąd $n = 2^{k-1}$.

Przykłady zaprezentowane w artykule stanowią jedynie absolutny wierzchołek góry lodowej, którą stanowią możliwe zastosowania wielomianów w różnych dziedzinach matematyki. Tradycyjnie już oferujemy dwa zadania do samodzielnego rozwiązania. Mamy nadzieję, że pomogą one Czytelnikowi skorzystać z wielomianów w jeszcze wielu kolejnych problemach.

Zadanie 5. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x + y + z = 3, \qquad xy + yz + zx = -9.$$

Udowodnić, że $-27 \leqslant xyz \leqslant 5$.

Podpowiedź. Rozważ pochodną wielomianu, którego pierwiastkami są liczby x, y, z.

Zadanie 6. Dane jest $2n$ parami różnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz tablica $n \times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie wpisano liczbę $a_i + b_j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Udowodnić, że jeżeli iloczyny liczb we wszystkich kolumnach są równe, to również iloczyny liczb we wszystkich wierszach są równe.

Podpowiedź. Rozważ wielomian $P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) - c$, gdzie c jest wartością wspólną iloczynów liczb w kolumnach.