Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 695 ($WT = 1{,}77$) i 696 ($WT = 2{,}86$) z numeru 2/2015

Janusz Olszewski	Warszawa	44,85
Wojciech Tobiś	Praszka	44,21
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garncarek	Opole	37,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89
Paweł Najman	Kraków	33,64

Janusz Olszewski – nazwisko może znane uczestnikom *ligi* i czytelnikom *Delty*? To po raz *szesnasty*, jakby co. Nowy zaś w szeregach Klubu 44 M: Wojciech Tobiś – to już numer 126.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 705, 706

Redaguje Marcin E. KUCZMA

705. Niech A_0 będzie ustalonym wierzchołkiem $(n{+}1)$-kąta foremnego. Numerujemy pozostałe wierzchołki $A_1, \ldots, A_n$ w dowolnej kolejności. Każdemu bokowi A_iA_j przyporządkowujemy liczbę $|i-j|$. Niech S będzie sumą $n+1$ liczb, przyporządkowanych wszystkim bokom. Dla zadanej liczby naturalnej n:

(a) Obliczyć najmniejszą osiągalną wartość sumy S.
(b) Wyjaśnić, ile jest sposobów ponumerowania n wierzchołków (poza A_0), przy których S osiąga ową minimalną wartość.

706. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, dla których istnieje wielomian W stopnia n, o współczynnikach całkowitych, ze współczynnikiem wiodącym równym 1, i taki, że równanie $W(x)^2 = 1$ ma $2n$ pierwiastków całkowitych (niekoniecznie różnych).

Zadanie 706 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2015

Przypominamy treść zadań:

701. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczność zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $3n$, w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od n.

702. Niech $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych $n \geqslant 1$, dla których równanie $F_{2n}(x) = F_n(y)$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych $x, y \geqslant 1$.

701. Liczba n jest nieparzysta, zatem zbiór wszystkich liczb parzystych, mniejszych od $3n$, ma własność, o którą chodzi. Jest ich $(3n-1)/2$. Wykażemy, że jest to największa możliwa liczność.

Rozbijamy zbiór $\{1, \ldots, 3n{-}1\}$ na rozłączne pary:

$$\{1\,,\,n-1\},\quad \{2\,,\,n-2\},\quad \ldots\,,\quad \{(n-1)/2\,,\,(n+1)/2\},$$
$$\{n\,,\,2n\},\quad \{n+1\,,\,2n+1\},\quad \ldots\,,\quad \{n+(n{-}1)\,,\,2n+(n{-}1)\}.$$

W górnym rządku mamy $(n-1)/2$ par, w dolnym n par; razem $(3n-1)/2$ par. Zbiór o większej liczności (zawarty w $\{1, \ldots, 3n{-}1\}$) musi zawierać jedną z wymienionych par. Ale w każdej parze albo suma, albo różnica elementów jest równa n. Stąd nasza teza.

702. Pokażemy, że gdy p jest nieparzystą liczbą pierwszą, równanie $F_{2p}(x) = F_p(y)$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Przypuśćmy, że para liczb całkowitych $x, y \geqslant 1$ jest rozwiązaniem. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata,

$$F_{2p}(x) = x^{2p} + (x+1)^{2p} \equiv x^2 + (x+1)^2 \pmod p,$$
$$F_p(y) = y^p + (y+1)^p \equiv y + (y+1) \pmod p.$$

Jeśli więc $F_{2p}(x) = F_p(y)$, to $2x^2 + 2x \equiv 2y$, czyli $x^2 + x \equiv y \pmod p$.

Z wypukłości funkcji $t \mapsto t^p$ (w zbiorze liczb dodatnich) wynika nierówność

$$F_p(y) = F_{2p}(x) = \left(x^2\right)^p + \left(x^2+2x+1\right)^p > \\ > \left(x^2+x\right)^p + \left(x^2+x+1\right)^p = F_p(x^2+x).$$

Funkcja F_p jest rosnąca; stąd $y > x^2 + x$. Skoro zaś $x^2 + x \equiv y \pmod p$, widzimy, że $y \geqslant x^2 + x + p$. A zatem $F_p(y) \geqslant F_p(x^2+x+p)$. Aby uzyskać oczekiwaną sprzeczność, wystarczy wykazać, że

(1) $$F_p(x^2+x+p) > F_{2p}(x).$$

Oznaczmy: $x + \frac{1}{2} = z$; wtedy $x^2 + x = z^2 - \frac{1}{4} > z^2 - \frac{1}{2}$. Ponownie korzystając z wypukłości funkcji t^p, mamy nierówność $F_p(t) > 2\bigl(t+\frac{1}{2}\bigr)^p$. Wobec tego

(2) $$F_p(x^2{+}x{+}p) > F_p\Bigl(z^2{-}\frac{1}{2}{+}p\Bigr) > 2\Bigl(z^2{+}p\Bigr)^p = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} z^{2p-2k}p^k.$$

Z drugiej strony,

(3) $$F_{2p}(x) = \Bigl(z-\frac{1}{2}\Bigr)^{2p} + \Bigl(z+\frac{1}{2}\Bigr)^{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k} z^{2p-2k}\cdot\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{2k}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli pokażemy, że w wyrażeniu po prawej stronie (2) współczynnik stojący przy z^{2p-2k} jest nie mniejszy niż analogiczny współczynnik w wyrażeniu (3); czyli, że

(4) $$a_k := \bigl(4p\bigr)^k \binom{p}{k}\binom{2p}{2k}^{-1} \geqslant 1 \quad \text{dla } k = 0, \ldots, p.$$

Łatwo przerachować, że

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4p\,(2k+1)}{2p-2k-1} > \frac{4p}{2p} > 1.$$

Stąd $1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p$; oszacowanie (4) gotowe, dowód zakończony.

Przypominamy komentarz, towarzyszący treści zadania (prop. Piotr Kumor): jest to kontynuacja dawnego zadania 194 (prop. Marcin Mazur) z tezą: dla $n \geqslant 2$ badane równanie ma w liczbach całkowitych co najwyżej skończenie wiele rozwiązań – oraz zasygnalizowanym problemem: czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ($|x|, |y| \leqslant 1$)?

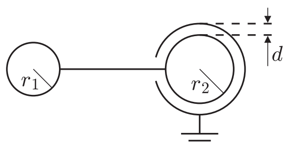
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2015

Zadania z fizyki nr 602, 603

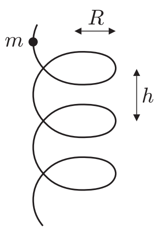
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

602. Dwie przewodzące kule o promieniach r_1 i r_2, połączone przewodzącym drutem, znajdują się w dużej odległości od siebie. Kula o promieniu r_2 otoczona jest uziemioną sferą przewodzącą z małym otworkiem (rys. 1). Odległość sfery od kuli wynosi d i jest dużo mniejsza od promienia kuli. Kule naładowano ładunkiem Q. Wyznacz rozmieszczenie ładunku na kulach.



Rys. 1

603. Po ustawionej pionowo sztywnej spirali zsuwa się z zerową prędkością początkową mały koralik o masie m. Promień spirali wynosi R, skok spirali (odległość między sąsiednimi zwojami) wynosi h (rys. 2). Znaleźć wartość przyspieszenia koralika na końcu n-tego zwoju. Tarcie zaniedbać.



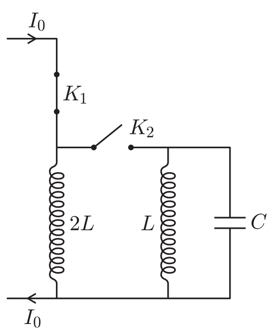
Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2015

Przypominamy treść zadań:

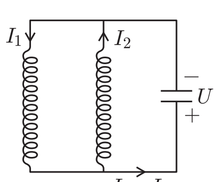
598. Przez cewkę o współczynniku samoindukcji $2L$ płynie prąd stały o natężeniu I_0 z zewnętrznego źródła (rys. 3). Po zamknięciu klucza K_2 do cewki podłączamy równolegle cewkę o współczynniku samoindukcji L oraz kondensator o pojemności C. Następnie otwieramy klucz K_1. Znaleźć maksymalne napięcie na kondensatorze i maksymalne natężenie prądu płynącego w cewce o współczynniku samoindukcji L. Elementy obwodu uważamy za idealne.

599. Koło, którego cała masa rozłożona jest równomiernie na obwodzie, może obracać się bez tarcia wokół swojej osi skierowanej poziomo. Wewnątrz koła, wzdłuż jego obwodu biegnie wiewiórka. Współczynnik tarcia między kołem a wiewiórką wynosi μ. Stosunek masy koła do masy wiewiórki równy jest n. Jakie maksymalne, stałe przyspieszenie liniowe może nadać kołu wiewiórka?



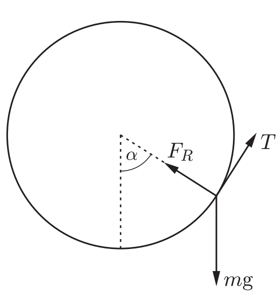
Rys. 3

598. Po zamknięciu klucza K_2 kondensator nie ładuje się, bo napięcie między końcami cewki o współczynniku samoindukcji $2L$ wynosi 0, a przez cewkę o współczynniku samoindukcji L nie płynie prąd, gdyż zmiana natężenia prądu indukowałaby siłę elektromotoryczną na bezoporowej cewce. Po otwarciu obwodu zewnętrznego, oznaczając natężenia prądów jak na rysunku 4, mamy dla lewego oczka: $2L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = 0$, z warunkami początkowymi $I_1(0) = I_0$, $I_2(0) = 0$. Stąd $2(I_0 - I_1) = I_2$. Ponieważ elementy obwodu uważamy za idealne, w obwodzie nie ma strat energii: $2L\frac{I_0^2}{2} = 2L\frac{I_1^2}{2} + L\frac{I_2^2}{2} + C\frac{U^2}{2}$. Gdy natężenia prądów w cewkach mają te same wartości $I_1 = I_2 = 2\frac{I_0}{3}$, kondensator nie ładuje się ani nie rozładowuje i napięcie na nim jest maksymalne. Stąd $U_{\max} = I_0\frac{2L}{3C}$. Natężenia prądów w cewkach są maksymalne, gdy ich pochodne, a tym samym siły elektromotoryczne samoindukcji są równe zeru. W tym momencie znika również napięcie na kondensatorze połączonym równolegle z cewkami i cała energia skupiona jest w cewkach: $2L\frac{I_0^2}{2} = 2L\frac{I_{1\,\max}^2}{2} + L\frac{I_{2\,\max}^2}{2}$. Stąd $I_{2\,\max} = \frac{4I_0}{3}$.



Rys. 4

599. Rysunek 5 przedstawia siły działające na wiewiórkę. Są to: siła ciężkości mg, siła reakcji F_R i siła tarcia T. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na koło działa stycznie siła o wartości T, która nadaje mu przyspieszenie $a = \frac{T}{M}$, gdzie M jest masą koła. Przyspieszenie koła ma być stałe, zatem T również musi być stałe. Ponieważ przyspieszenie koła ma mieć maksymalną wartość, to $T = \mu F_R$ oraz F_R też jest stałe. W układzie odniesienia związanym z Ziemią wiewiórka porusza się po okręgu: $\frac{mv^2}{R} = F_R - mg\cos\alpha$, gdzie m jest masą wiewiórki, v jej prędkością, a R promieniem okręgu. Siła reakcji F_R może być stała w dwóch przypadkach: albo wiewiórka biegnie po okręgu tak, że jej kwadrat prędkości jest sumą funkcji proporcjonalnej do $(-\cos\alpha)$ i funkcji stałej, albo jest nieruchoma i $F_R = mg\cos\alpha$. W pierwszym przypadku dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$ kwadrat prędkości osiąga odpowiednio najmniejszą i największą wartość. Wtedy składowa przyspieszenia wiewiórki styczna do okręgu wynosi 0, a zatem i siła tarcia T równa jest zeru (siła ciężkości jest w tych położeniach skierowana wzdłuż promienia). Przypadek pierwszy należy więc odrzucić. Gdy wiewiórka nie porusza się względem Ziemi, zachodzi związek: $T = mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$, zatem $\operatorname{tg}\alpha = \mu$. Stąd mamy $T = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Szukane przyspieszenie jest równe $a = \frac{\mu g}{n\sqrt{1+\mu^2}}$.



Rys. 5