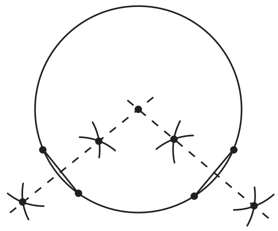
Prosto w środek

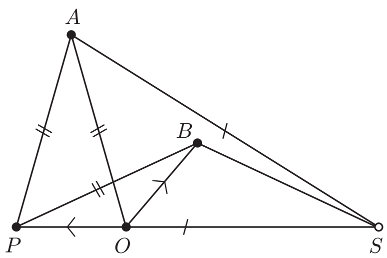
Łukasz RAJKOWSKI

Przeciętny uczeń rozpoczyna podróż po fascynującym świecie geometrycznych konstrukcji uzbrojony w linijkę i kątomierz. Kiedy już nauczyciel uzna swojego podopiecznego za wystarczająco odpowiedzialnego, by nie rysował szkolnych ławek (jakże często zbyt naiwne założenie), uczeń dostaje do ręki kolejne narzędzie walki z czystą kartką papieru, jakim jest cyrkiel. Wraz z nastaniem ery cyrklowej uczeń jest zdolny rysować w zeszycie całe mnóstwo okręgów o zadanym środku, czasem nawet mając w tym jakiś wyższy konstrukcyjny cel. Przykładem tego ostatniego mogłaby być operacja w pewnym sensie odwrotna – skonstruowanie środka okręgu, gdy mamy zadany jedynie sam okrąg. Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że gdy jesteśmy wyposażeni w cyrkiel i linijkę, zadanie to nie stanowi większego wyzwania; wystarczy narysować dwie nierównoległe cięciwy okręgu, a następnie ich symetralne, których przecięcie wyznaczy nam, oczywiście, szukany środek (rys. 1).



Rys. 1

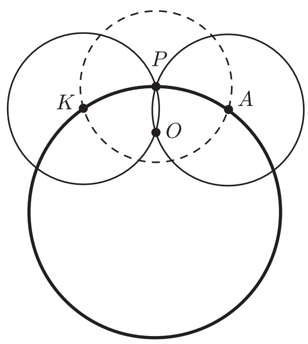
Schody pojawiają się, jeśli zazdrosny o nasze sukcesy kolega z ławki podprowadzi nam linijkę. Skarżenie nauczycielowi jest poniżej naszej godności, podobnie rozwiązanie tej kwestii po lekcjach na szkolnym podwórku, dlatego zaciskamy zęby i próbujemy wyznaczyć środek okręgu przy użyciu samego cyrkla. W rozwiązaniu przydatna okazuje się następująca konfiguracja geometryczna (rys. 2): jeśli $SA = SP$, punkt O leży na odcinku SP i spełnia $AO = AP$, natomiast dla punktu B zachodzą równości $OB = OP$ oraz $PB = PA$, to wówczas $BP = BS$. Istotnie, zauważmy, że przy przedstawionych założeniach trójkąty PSA i PAO są podobne (jako równoramienne trójkąty o tym samym kącie przy podstawie), dlatego korzystając z założonych równości, otrzymujemy



Rys. 2

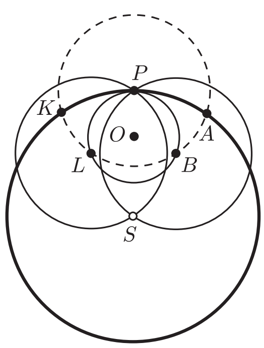
$$\frac{PB}{PS} = \frac{PA}{PS} = \frac{PO}{PA} = \frac{PO}{PB}.$$

Z powyższego i z zasady „bok-kąt-bok” wnioskujemy podobieństwo trójkątów PSB i PBO, a skoro ten ostatni jest równoramienny, to musi zachodzić $BP = BS$. Przedstawioną obserwację można łatwo wykorzystać do dowodu poprawności niniejszej konstrukcji środka zadanego okręgu o przy użyciu samego cyrkla. Dla skrócenia zapisu niech oznaczenie okręgu przez o_X niesie ze sobą informację, że X jest środkiem tego okręgu. Należy narysować kolejno:



Rys. 3

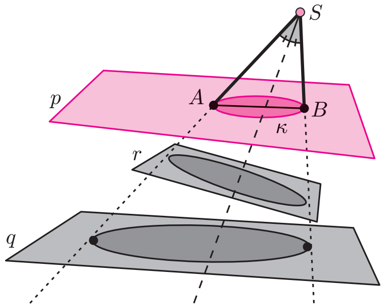
1. wystarczająco duży okrąg o_P (wystarczająco duży, czyli taki, dla którego $\sphericalangle APK < 2 \arccos \frac{1}{4}$; można nietrudno sprawdzić, że w przeciwnym przypadku nie uzyskamy punktów B i L z kroku 3), gdzie P należy do okręgu o; niech A i K będą punktami przecięcia o z o_P (rys. 3),
2. okręgi o_A i o_K o promieniu $PA = PK$; niech O będzie różnym od P przecięciem tych okręgów (rys. 3),
3. okrąg o_O o promieniu OP i niech B i L będą przecięciami nowego okręgu z o_P (rys. 4),
4. punkt S, będący przecięciem (różnym od P) okręgów o_B i o_L o promieniu $BP = LP$ (rys. 4).



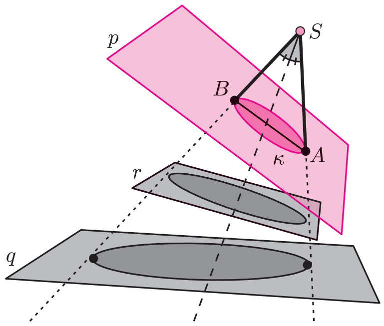
Rys. 4

Tak skonstruowany punkt S stanowi szukany środek okręgu o. Istotnie, jeśli nieufnie oznaczymy ów środek przez S', to w trzecim kroku konstrukcji punkty S', P, A, O, B tworzą konfigurację przedstawioną na rysunku 2 i w tej sytuacji okrąg o_B z punktu 4 przechodzi przez S'. Analogicznie, przez S' przechodzi również o_L i dlatego $S = S'$.

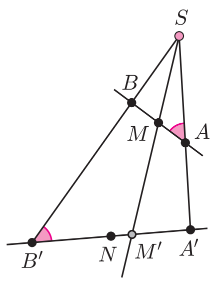
Udało nam się utrzeć nosa niedobremu koledze i zachęceni tym dokonaniem, postanowiliśmy dokonać tej samej sztuki wyłącznie przy użyciu odzyskanej w glorii linijki. Początkowy entuzjazm prędko przeradza się jednak w niepokój, a wkrótce zaczynają się pojawiać oznaki paniki. Pomimo prężenia intelektualnych muskułów i dziesiątek prób dokonanych na kilkunastu wyrzuconych ostatecznie do kosza kartkach środek okręgu o skutecznie unika namierzenia przez nasz nowy oręż.
Po kolejnym nieudanym podejściu w naszej głowie pojawia się iskierka nadziei – może wszystkie niepowodzenia nie są kwestią naszej umysłowej niedyspozycji, a tego, że po prostu *się nie da*? Jak jednak mogłoby wyglądać uzasadnienie tego, że czegoś *nie da się* skonstruować przy użyciu samej linijki? Po chwili zastanowienia jedyne, co przychodzi nam do głowy, to pokazanie, że nawet jeśli pewien konstrukcyjny przepis sprawdzi się na jednym okręgu, polegnie na innym.
Gdzie jednak należy szukać tego drugiego okręgu? Okazuje się, że na innej kartce!



Rys. 5



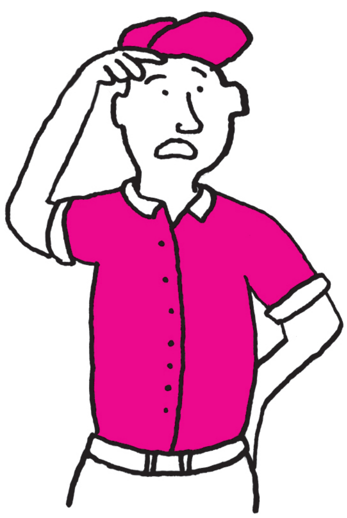
Rys. 6



Rys. 7

Zamalujmy na przezroczystej kartce p koło κ ograniczone okręgiem o. Nad kartką p umieśćmy punktowe źródło światła S w taki sposób, by na pewno nie znajdowało się ono bezpośrednio nad środkiem okręgu o. Pod kartkę p podłóżmy równoległą do niej kartkę q – nietrudno przekonać się, że koło κ będzie rzucało na q cień w kształcie koła. Wyobraźmy sobie teraz, że ze środka o wystaje maszt i niech A, B będą punktami przecięcia okręgu o z przedłużeniem cienia masztu. Między kartki p i q wstawmy teraz na chwilę kartkę r, prostopadłą do dwusiecznej kąta $\sphericalangle ASB$ – wówczas κ rzuca na r cień w kształcie elipsy, której środek symetrii wyznaczany jest przez przecięcie r ze wspomnianą dwusieczną (rys. 5). W tej sytuacji, jeśli przymocujemy S do punktów A i B kartki p i tak powstałą, sztywną konstrukcję obróćmy o $180°$ wokół dwusiecznej kąta ASB, to cień κ na r nie ulegnie zmianie (rys. 6). Ponieważ cień κ na q możemy traktować jako cień cienia κ na r, a ten ostatni się nie zmienił, więc koło κ w nowym położeniu również rzuca na q cień w kształcie koła.

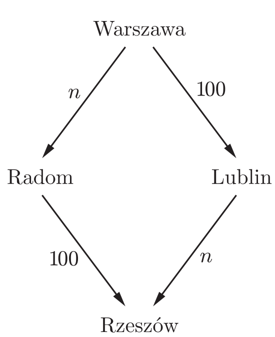
Przypuśćmy teraz, że udało się nam wyznaczyć środek okręgu o przy użyciu samej linijki. Poprośmy kolegę z ławki, by zastosował ten sam przepis dla cienia okręgu o na kartce q. Ze względu na bogate doświadczenie w niesamodzielnej pracy kolega szybko zorientował się, że wystarczy wykonywać „cienie” operacji przeprowadzanych przez nas na okręgu o. W tej sytuacji uzyskany przez niego kandydat na środek cienia okręgu o okaże się cieniem skonstruowanego przez nas środka tego okręgu. Niestety, obaj nie możemy mieć racji, gdyż cień środka odcinka AB z pewnością nie jest środkiem cienia tego odcinka, do czego powinien przekonać nas rysunek 7. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć środka okręgu, posługując się wyłącznie linijką. Nasze wcześniejsze konstrukcyjne niepowodzenia zostały więc usprawiedliwione – *niemożność* ma jednak swoje dobre strony.



Kłopoty z komunikacją

Wojciech CZERWIŃSKI

„W takich Niemczech to mają dobre drogi, a w Polsce… No cóż, średni czas potrzebny na przejazd np. z Warszawy do Rzeszowa jest stanowczo za długi.” Wielu Czytelników zapewne zgodzi się z tym stwierdzeniem lub doda, że jest zbyt eufemistyczne, inni zaś powiedzą, że przecież nie jest znowu aż tak źle. Z kolei ktoś może konstruktywnie zaproponować, żeby zamiast zastanawiać się, jak jest, zastanowić się, co zrobić, by było lepiej. „Jak to co? Nic prostszego – trzeba zacząć budować nowe drogi!” – chciałoby się odpowiedzieć. Wydaje się, że to naturalne rozwiązanie, które powinno poprawić naszą sytuację. Spójrzmy jednak na problem od strony matematycznej, by przekonać się, że nie zawsze musi to być prawda.



Rozważmy następujący, hipotetyczny Problem Kierowcy Tira. Powiedzmy, że z Warszawy do Rzeszowa może on jechać na dwa sposoby: albo przez Lublin, albo przez Radom. Droga z Warszawy do Lublina jest szeroka, ale długa; jedzie się nią zawsze 100 minut. Natomiast droga z Warszawy do Radomia jest krótka, ale wąska, więc czas przejazdu istotnie zależy od natężenia ruchu na tej drodze. Na nasze potrzeby przypuśćmy (dość nierealistycznie), że jeśli jedzie nią jednocześnie n tirów, to czas przejazdu dla każdego z nich wynosi n minut. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla dojazdu do Rzeszowa. Tyle że teraz podróż z Radomia do Rzeszowa zawsze trwa 100 minut, a z Lublina do Rzeszowa n minut, jeśli drogą jedzie n tirów. Przypuśćmy teraz, że codziennie z Warszawy do Rzeszowa jedzie 100 tirów. Jeśli wszystkie jechałyby przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich wyniósłby $100 + n$ minut, gdzie $n = 100$, czyli w sumie 200 minut. Analogicznie, gdyby wszystkie tiry pojechały przez Radom. Jednak gdyby połowa tirów pojechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich zmniejszyłby się do 150 minut, i łatwo wykazać, że byłoby to optymalne rozwiązanie. Powinno więc powstać Stowarzyszenie Kierowców, które dbałoby o to, żeby codziennie dokładnie połowa kierowców jechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin.