Okręgi Carlyle'a

Karol GRYSZKA[*]

Jednym z najstarszych zagadnień matematyki są równania algebraiczne, wśród nich problem znalezienia pierwiastków trójmianu kwadratowego. Już w starożytności pojawiły się zadania, do rozwiązania których należało wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby (to jest rozwiązać równanie $x^2 = a$ dla $a > 0$) lub odnaleźć miejsce zerowe trójmianu kwadratowego. Pojawił się, między innymi, klasyczny problem wyznaczenia długości przekątnej kwadratu (oraz wykazanie niewspółmierności przekątnej z bokiem). Jedne z pierwszych zapisków zawierających rozwiązania równań kwadratowych oraz sześciennych pochodzą jeszcze z czasów Babilonii, datowane są na 1800–1600 p.n.e. Dopiero prawie 3000 lat później, w XII wieku Aczarja Bhaskara wykazał, że liczba dodatnia ma dwa pierwiastki.

Kwadratura koła – problem polegający na skonstruowaniu kwadratu o polu równym polu danego koła. Algebraicznie reprezentuje to równanie $\pi r^2 = a^2$, gdzie r jest promieniem danego koła, a a długością boku poszukiwanego kwadratu. Dla $r = 1$ bok ten wynosi $\sqrt{\pi}$, a zatem niezbędne jest albo wyznaczenie wartości liczby $\sqrt{\pi}$, albo jej przybliżenie przez odpowiednią konstrukcję geometryczną.

Thomas Carlyle – żyjący w okresie wiktoriańskim szkocki pisarz, historyk oraz filozof historii. Znany współcześnie z takich książek jak „Rewolucja Francuska: historia" oraz „Sartor Resartus".

Wiele problemów algebraicznych można rozwiązać w sposób dokładny lub przybliżony, wykorzystując narzędzia geometrii. Historia zna wiele przykładów, począwszy od problemu kwadratury koła, przez rozwiązywanie równań oraz układów równań liniowych. Takie graficzne (i dokładne) rozwiązanie jest również możliwe dla równań kwadratowych. Rozwiązanie graficzne wykorzystuje jedynie klasyczne konstrukcje oparte na cyrklu i linijce – oraz tytułowe okręgi Carlyle'a.

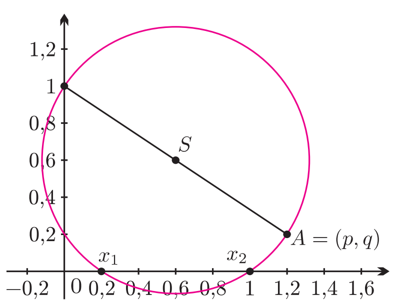
Rozważmy równanie kwadratowe:

$$x^2 - px + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Naszym celem jest znalezienie rozwiązań powyższego równania, za pomocą pewnej konstrukcji geometrycznej. Oczywiście, algebraicznie jesteśmy w stanie natychmiast podać pierwiastki równania (1):

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Jedną z metod przybliżonego poszukiwania pierwiastków jest próba narysowania paraboli. Zwykle jednak do tego celu wykorzystujemy właśnie pierwiastki równania. Tego błędnego koła można szczęśliwie uniknąć, wykorzystując wspomniane już okręgi Carlyle'a.



Wprowadźmy formalną definicję. **Okręgiem Carlyle'a** stowarzyszonym z równaniem kwadratowym (1) nazywamy okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach w punktach $(0, 1)$ oraz (p, q).

Okrąg Carlyle'a jest wyznaczony w sposób jednoznaczny przez równanie (1). Co więcej, łatwo można zaobserwować, że dla każdego okręgu przechodzącego przez punkt $(0, 1)$, istnieją takie wartości współczynników p oraz q, że okrąg ten jest okręgiem Carlyle'a stowarzyszonym z równaniem kwadratowym $x^2 - px + q = 0$.

Najważniejszą cechą okręgu Carlyle'a jest jego związek z pierwiastkami równania, które wyznacza okrąg. Okazuje się bowiem, że liczba ξ jest rozwiązaniem równania (1) wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszony okrąg Carlyle'a przecina oś odciętych w punkcie $(\xi, 0)$. Istotnie, środek takiego okręgu to punkt o współrzędnych $(\frac{p}{2}, 1 + \frac{q-1}{2})$, a z twierdzenia Pitagorasa jego promień jest równy $r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$. Okrąg Carlyle'a opisany jest więc równaniem

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \left(1 + \frac{q-1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Ponieważ poszukujemy punktów przecięcia okręgu z osią OX, więc podstawiamy $y = 0$ do równania (2). Upraszcza się ono do postaci

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{q-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Po redukcji równania (3) otrzymujemy dokładnie równanie (1).

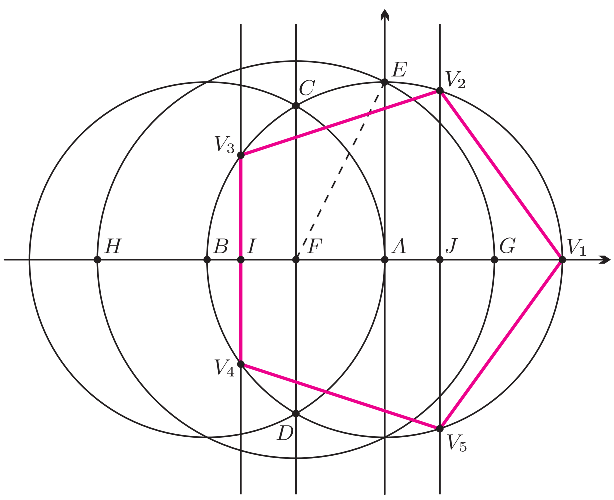
*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Rozwiązanie zadania M 1465.
Odp. Nie!

Dwudziestościan foremny jest środkowosymetryczny, więc każdy jego przekrój płaszczyzną przechodzącą przez jego środek również. Nie istnieje natomiast środkowosymetryczny jedenastokąt.

Należy ponadto sprawdzić, że okrąg przecina oś OX w co najmniej jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu (1) jest nieujemny. Można to zrobić niezależnie od powyższego rozumowania i to zadanie pozostawiamy Tobie, Drogi Czytelniku.

Dzięki swoim własnościom okręgi Carlyle'a znalazły zastosowanie w konstrukcjach wielokątów foremnych. W szczególności za ich pomocą, wykorzystując wyłącznie cyrkiel i linijkę, można łatwo skonstruować pięciokąt oraz siedemnastokąt foremny.



Opiszemy teraz konstrukcję pięciokąta foremnego z wykorzystaniem okręgów Carlyle'a.

1. Narysuj okrąg (zwany dalej: początkowym) o środku w punkcie $A = (0,0)$ oraz promieniu 1. Niech ponadto $B = (-1,0)$, $V_1 = (1,0)$ oraz $E = (0,1)$. Punkt V_1 jest jednym z wierzchołków konstruowanego pięciokąta foremnego.
2. Narysuj okrąg o środku w punkcie B przechodzący przez punkt A. Okrąg ten przecina okrąg początkowy w punktach C oraz D.
3. Przez punkty C oraz D poprowadź prostą. Punkt jej przecięcia z osią OX oznacz F.
4. Narysuj okrąg o środku w punkcie F przechodzący przez punkt E. Przecina on oś OX w dwóch punktach G oraz H.
5. Skonstruuj symetralne odcinków HA oraz AG. Oznacz miejsca przecięcia tych symetralnych z osią OX odpowiednio przez I oraz J.
6. Symetralne skonstruowane w punkcie 5. przecinają ponadto okrąg początkowy w czterech punktach V_2, V_3, V_4, V_5, będących jednocześnie czterema brakującymi wierzchołkami pięciokąta foremnego.

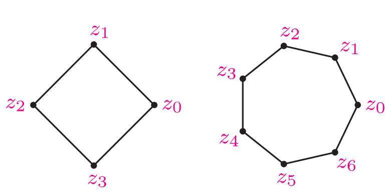
Wyprowadzimy teraz algebraicznie powyższą konstrukcję. Konstrukcja ta wykorzystuje podstawowe wiadomości dotyczące zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Liczby zespolone stanowią rozszerzenie liczb rzeczywistych o „pierwiastek z -1". Formalnie liczby zespolone definiujemy jako zbiór par liczb rzeczywistych (a,b) z działaniami dodawania oraz mnożenia zdefiniowanymi następująco:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Tradycyjnie liczbę $(0,1)$ oznacza się przez i. Innym sposobem zapisu liczby zespolonej $z = (a,b)$ jest jej postać algebraiczna $z = a+ib$. Definiuje się część rzeczywistą $\mathrm{Re}(z) := a$ oraz urojoną $\mathrm{Im}(z) := b$, ponadto definiuje się moduł liczby zespolonej $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ oraz jej argument ϕ będący wartością kąta nachylenia wektora $[a,b]$ na płaszczyźnie względem osi OX. Argument spełnia zależności $\sin\phi = \frac{b}{|z|}$ oraz $\cos\phi = \frac{a}{|z|}$. Pozwala to na zapisanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ oraz wykładniczej $z = |z|e^{i\phi}$, która wynika ze wzoru Eulera $e^{it} = \cos t + i\sin t$ prawdziwego dla dowolnej liczby rzeczywistej t. Charakterystyczną cechą zbioru liczb zespolonych jest to, że wszystkie równania algebraiczne mają w nim pierwiastki. Równanie $x^2 = -3$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast ma dwa rozwiązania zespolone $x_1 = i\sqrt{3}$ oraz $x_2 = -i\sqrt{3}$.

Wzór de Moivre'a
Pierwiastki stopnia n z jedynki zawsze wyznaczają na płaszczyźnie wierzchołki wielokątów foremnych. Wynika to ze wzoru de Moivre'a, który pozwala na wyliczenie pierwiastków dowolnego stopnia z dowolnej liczby, również zespolonej. Jeżeli dane jest równanie $z^n = w$, to jego rozwiązaniami są $z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$ dla $k = 0,1,\ldots,n-1$, gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej w. Dla $w=1$ rozwiązania te można zapisać krótko w postaci wykładniczej $z_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}}$.



Przykłady dla $n = 4$ oraz $n = 7$.

Przejdźmy do wyprowadzenia konstrukcji. Aby zbudować pięciokąt foremny, wystarczy skonstruować pierwiastki piątego stopnia z jedynki, czyli rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie

$$z^5 = 1. \tag{4}$$

Jednym z pierwiastków równania (4) jest, oczywiście, $z_0 = 1$, pozostałe natomiast spełniają równanie

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{5}$$

Niech teraz $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{5}}$ dla $k = 1, 2, 3, 4$ będą pierwiastkami równania (5). Zdefiniujmy

$$w_1 := z_1 + z_4 = 2\mathrm{Re}(z_1) = 2\cos\frac{2}{5}\pi, \qquad w_2 := z_2 + z_3 = 2\mathrm{Re}(z_2) = 2\cos\frac{4}{5}\pi. \tag{6}$$

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków wynika, że $w_1 + w_2 = -1$, ponadto $w_1 w_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_4 z_2 + z_4 z_3 = z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1$. Ponownie korzystając ze wzorów Viète'a, stwierdzamy, że w_1 oraz w_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$. Konstruujemy zatem okrąg Carlyle'a o średnicy opartej na punktach $(-1, -1)$ i $E = (0, 1)$. Jego środkiem jest punkt $F = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, a punktami przecięcia z osią odciętych, zgodnie ze wzorem (6) są $H = \left(2\cos\frac{4}{5}\pi, 0\right)$ oraz $G = \left(2\cos\frac{2}{5}\pi, 0\right)$. Symetralne odcinków AG oraz AH przecinają więc oś OX w punktach J oraz I odpowiednio, których odcięte są równe częściom rzeczywistym odpowiednich pierwiastków. Ponieważ symetralne mają stałą odciętą, przecinają one okrąg każda w dwóch punktach, będących jednocześnie poszukiwanymi pierwiastkami równania (5).

Algebraiczna metoda wyznaczenia wartości kosinusa

Oznaczmy $u = \frac{2}{5}\pi$ oraz $a = \cos u$. Wtedy $\cos 4u = \cos(2\pi - u) = \cos u$. Z drugiej strony, korzystając ze wzorów $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ oraz jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy $\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1$. Aby wyznaczyć wartość $\cos u$, wystarczy teraz rozwiązać równanie $8a^4 - 8a^2 + 1 = a$. Równanie to ma dwa wymierne pierwiastki $a_1 = 1$ oraz $a_2 = -\frac{1}{2}$, pozostałe dwa są pierwiastkami trójmianu $4a^2 + 2a - 1$. Ponieważ $\frac{\pi}{3} < u < \frac{\pi}{2}$, zatem $\frac{1}{2} > a > 0$, czyli a jest pierwiastkiem trójmianu. Ale tylko jeden z nich jest dodatni, jest nim $a = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$. Stąd ostatecznie $\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

Wielokąty foremne mające 257 oraz 65537 boków również dają się skonstruować z wykorzystaniem okręgów Carlyle'a. Fizyczny model wymagałby jednak bardzo dokładnego oraz bardzo dużego cyrkla. O ile konstrukcja pięciokąta wymaga zaledwie jednego okręgu Carlyle'a, a konstrukcja siedemnastokąta czterech, to konstrukcja 257-kąta wymaga 24 okręgów; jeden z nich jest rozwiązaniem równania $x^2 + x - 64 = 0$ (a więc ma promień kilkadziesiąt razy większy niż okrąg jednostkowy, na którym budowany jest wielokąt). W przypadku 65537-kąta jeden z okręgów będzie stowarzyszony z równaniem $x^2 + x - 8192 = 0$. W 1991 roku stwierdzono, że liczba wymaganych w tym celu okręgów nie przekracza 1332 (!). Dokładna i wystarczająca ich liczba nie jest niestety znana autorowi artykułu.

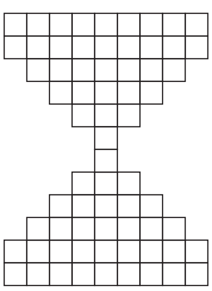
Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1465. Czy istnieje przekrój dwudziestościanu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez jego środek, będący jedenastokątem?
Rozwiązanie na str. 17

M 1466. Czy istnieje co najmniej 5-elementowy zbiór okręgów na płaszczyźnie, taki, że każde trzy okręgi ze zbioru mają punkt wspólny, ale nie istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ze zbioru?
Rozwiązanie na str. 14

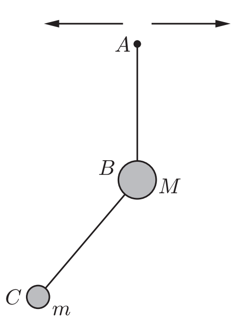
M 1467. Czy można pociąć na płytki o wymiarach 1×2 (▭▭) figurę przedstawioną na rysunku 1?
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

Przygotował Michał NAWROCKI

F 885. Do wahadła AB o długości L z kulką o masie M podwieszono wahadło BC z kulką o masie m (rys. 2). Punkt zawieszenia A wykonuje poziome drgania o okresie T. Znaleźć długość nici BC, jeżeli wiadomo, że nić AB podczas wahań wahadła zachowuje cały czas kierunek pionowy.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 2

F 886. Kamerą rejestrującą $f = 24$ obrazy na sekundę sfilmowano drgania wahadła matematycznego. Jeden pełny okres wahań zajmuje $N = 48$ kadrów. Długość obrazu wahadła na kliszy filmowej wynosi $L' = 10$ mm. Ogniskowa obiektywu kamery wynosi $F = 70$ mm. Z jakiej odległości D sfilmowano wahadło?
Rozwiązanie na str. 23