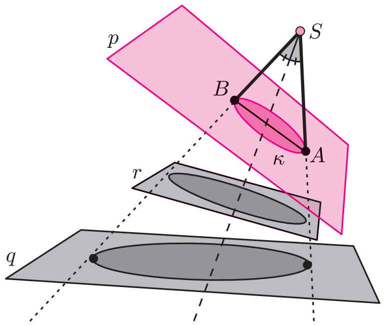
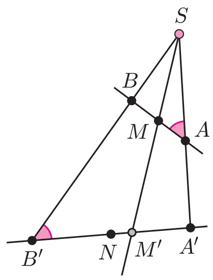


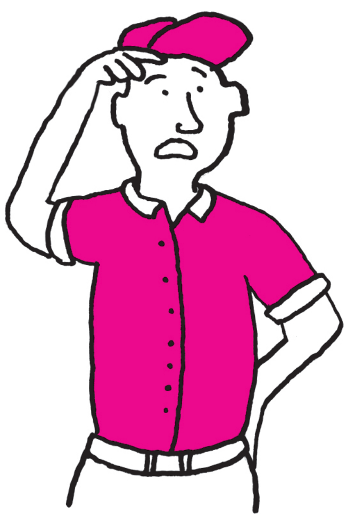
Rys. 6

Zamalujmy na przezroczystej kartce p koło κ ograniczone okręgiem o. Nad kartką p umieśćmy punktowe źródło światła S w taki sposób, by na pewno nie znajdowało się ono bezpośrednio nad środkiem okręgu o. Pod kartkę p podłóżmy równoległą do niej kartkę q – nietrudno przekonać się, że koło κ będzie rzucało na q cień w kształcie koła. Wyobraźmy sobie teraz, że ze środka o wystaje maszt i niech A, B będą punktami przecięcia okręgu o z przedłużeniem cienia masztu. Między kartki p i q wstawmy teraz na chwilę kartkę r, prostopadłą do dwusiecznej kąta $\sphericalangle ASB$ – wówczas κ rzuca na r cień w kształcie elipsy, której środek symetrii wyznaczany jest przez przecięcie r ze wspomnianą dwusieczną (rys. 5). W tej sytuacji, jeśli przymocujemy S do punktów A i B kartki p i tak powstałą, sztywną konstrukcję obróćmy o $180°$ wokół dwusiecznej kąta ASB, to cień κ na r nie ulegnie zmianie (rys. 6). Ponieważ cień κ na q możemy traktować jako cień cienia κ na r, a ten ostatni się nie zmienił, więc koło κ w nowym położeniu również rzuca na q cień w kształcie koła.



Rys. 7

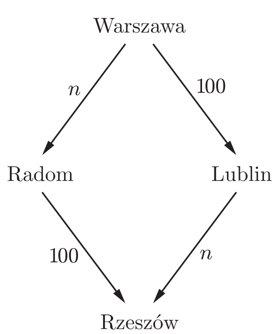
Przypuśćmy teraz, że udało się nam wyznaczyć środek okręgu o przy użyciu samej linijki. Poprośmy kolegę z ławki, by zastosował ten sam przepis dla cienia okręgu o na kartce q. Ze względu na bogate doświadczenie w niesamodzielnej pracy kolega szybko zorientował się, że wystarczy wykonywać „cienie” operacji przeprowadzanych przez nas na okręgu o. W tej sytuacji uzyskany przez niego kandydat na środek cienia okręgu o okaże się cieniem skonstruowanego przez nas środka tego okręgu. Niestety, obaj nie możemy mieć racji, gdyż cień środka odcinka AB z pewnością nie jest środkiem cienia tego odcinka, do czego powinien przekonać nas rysunek 7. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć środka okręgu, posługując się wyłącznie linijką. Nasze wcześniejsze konstrukcyjne niepowodzenia zostały więc usprawiedliwione – *niemożność* ma jednak swoje dobre strony.



Kłopoty z komunikacją

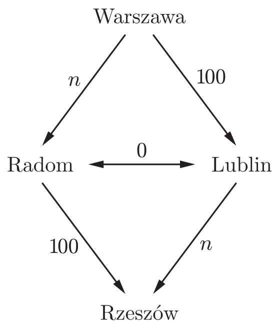
Wojciech CZERWIŃSKI

„W takich Niemczech to mają dobre drogi, a w Polsce... No cóż, średni czas potrzebny na przejazd np. z Warszawy do Rzeszowa jest stanowczo za długi.” Wielu Czytelników zapewne zgodzi się z tym stwierdzeniem lub doda, że jest zbyt eufemistyczne, inni zaś powiedzą, że przecież nie jest znowu aż tak źle. Z kolei ktoś może konstruktywnie zaproponować, żeby zamiast zastanawiać się, jak jest, zastanowić się, co zrobić, by było lepiej. „Jak to co? Nic prostszego – trzeba zacząć budować nowe drogi!” – chciałoby się odpowiedzieć. Wydaje się, że to naturalne rozwiązanie, które powinno poprawić naszą sytuację. Spójrzmy jednak na problem od strony matematycznej, by przekonać się, że nie zawsze musi to być prawda.

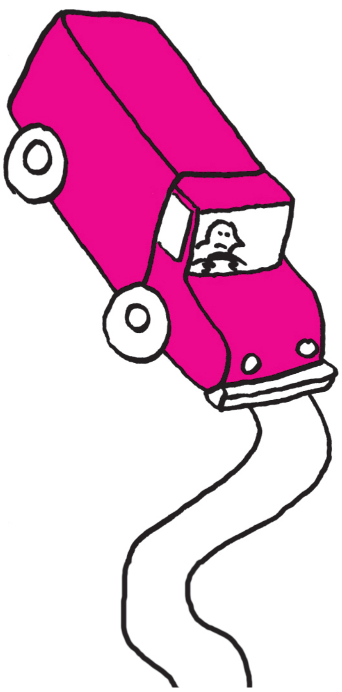


Rozważmy następujący, hipotetyczny Problem Kierowcy Tira. Powiedzmy, że z Warszawy do Rzeszowa może on jechać na dwa sposoby: albo przez Lublin, albo przez Radom. Droga z Warszawy do Lublina jest szeroka, ale długa; jedzie się nią zawsze 100 minut. Natomiast droga z Warszawy do Radomia jest krótka, ale wąska, więc czas przejazdu istotnie zależy od natężenia ruchu na tej drodze. Na nasze potrzeby przypuśćmy (dość nierealistycznie), że jeśli jedzie nią jednocześnie n tirów, to czas przejazdu dla każdego z nich wynosi n minut. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla dojazdu do Rzeszowa. Tyle że teraz podróż z Radomia do Rzeszowa zawsze trwa 100 minut, a z Lublina do Rzeszowa n minut, jeśli drogą jedzie n tirów. Przypuśćmy teraz, że codziennie z Warszawy do Rzeszowa jedzie 100 tirów. Jeśli wszystkie jechałyby przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich wyniósłby $100 + n$ minut, gdzie $n = 100$, czyli w sumie 200 minut. Analogicznie, gdyby wszystkie tiry pojechały przez Radom. Jednak gdyby połowa tirów pojechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich zmniejszyłby się do 150 minut, i łatwo wykazać, że byłoby to optymalne rozwiązanie. Powinno więc powstać Stowarzyszenie Kierowców, które dbałoby o to, żeby codziennie dokładnie połowa kierowców jechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin.

Jako że przewóz towarów z Warszawy do Rzeszowa okazał się jednym z filarów naszego przemysłu, GDDKiA postanowiła poprawić sytuację kierowców. W tym celu pomiędzy Radomiem a Lublinem zbudowana została droga (niesamowicie) szybkiego ruchu, która, dzięki wykorzystaniu najnowszych technologii, oferuje natychmiastowy przejazd w czasie 0 minut. Niestety, projekt ten nie został skonsultowany z żadnymi ekspertami-matematykami, co okazało się fatalne w skutkach.



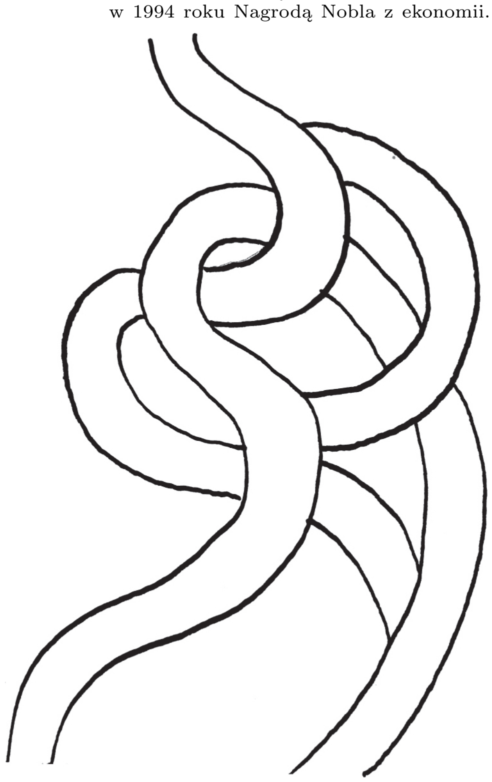
Zastanówmy się, jak wybudowanie nowej drogi wpłynęło na sytuację kierowców. Ponieważ przejazd pomiędzy Radomiem a Lublinem jest natychmiastowy, to drogę z Warszawy do Rzeszowa można w praktyce podzielić na dwa odcinki: z Warszawy do Radomio-Lublina oraz z Radomio-Lublina do Rzeszowa. Jasne jest, że na pierwszym odcinku bardziej opłaca się jechać drogą, która zajmuje n minut, niż tą, która zajmuje 100 minut, bo zawsze $n \leqslant 100$. Na drugim odcinku jest tak samo. A zatem najprawdopodobniej wszyscy kierowcy, nie zwracając uwagi na zalecenia Stowarzyszenia Kierowców, pojadą trasą Warszawa–Radom–Lublin–Rzeszów, co zajmie każdemu z nich $n + 0 + n = 200$ minut! Co więcej, żaden z kierowców nie będzie żałował swojej decyzji, będzie bowiem myślał tak: „gdybym pojechał z Warszawy na Lublin, a nie na Radom, to zamiast $n = 100$ minut wąską drogą jechałbym, tak czy siak, 100 minut, tyle że szeroką drogą”. Co prawda wtedy jego koledzy przejechaliby trasę Warszawa–Radom w 99 minut, więc może jeden z kierowców dałby się przekonać do zmiany trasy, ale kolejni z pewnością nie (gdyż pogarszaliby oni swój czas przejazdu z $n = 99$ minut na 100 minut).



Więc jak to – wybudowaliśmy nową drogę i w praktyce czas przejazdu wydłużył się? Niestety, tak właśnie jest! A to dlatego, że każdy z kierowców działa na własną korzyść i w ten sposób szkodzi innym kierowcom. Widać, że warto czasami konsultować się z matematykami w sprawach z pozoru z matematyką niezwiązanych. A że zjawisko nie jest czysto wydumane, świadczą rzeczywiste sytuacje. W Stuttgarcie w 1969 roku inwestycje drogowe doprowadziły do istotnego pogorszenia przejezdności centrum, w Nowym Jorku zaś w 1990 roku zaobserwowano efekt odwrotny: zamknięcie 42. ulicy spowodowało zwiększenie płynności ruchu. Oba zdarzenia tłumaczy się *paradoksem Braessa*, bo tak właśnie (od nazwiska niemieckiego matematyka Dietricha Braessa) nazywa się omawiany przez nas efekt.

Paradoks Braessa jest dobrą ilustracją zastosowania teorii gier. Opisana sytuacja jest szczególnego rodzaju grą, w której graczami są kierowcy rywalizujący (a czasem współpracujący), aby uzyskać jak najkrótszy czas przejazdu. Ich strategiami zaś są różne wybory dróg. Sytuacja, w której żadnemu z kierowców nie opłaca się zmienić swojej strategii, nazywa się równowagą Nasha. Okazuje się, że w naszej grze równowaga Nasha nie musi dawać optymalnego rozwiązania. Co więcej, po zbudowaniu dodatkowej drogi nowa równowaga Nasha może dać jeszcze gorsze rozwiązanie. Teoria gier zna dużo więcej przykładów, gdy egoistyczne działanie prowadzi do sytuacji niekorzystnych społecznie, jednym z najbardziej znanych jest dylemat więźnia (pisaliśmy o nim m.in. w *Delcie* 5/2015).

Chodzi o tego samego Johna Nasha, który został przedstawiony w filmie *Piękny umysł*. Za swoje pionierskie badania nad teorią gier został nagrodzony w 1994 roku Nagrodą Nobla z ekonomii.



Powyższy przykład rodzi pytanie o to, jak bardzo może nam zaszkodzić nieprzemyślane budownictwo dróg. Czy może się okazać, że na skutek inwestycji GDDKiA czas przejazdu z Warszawy do Rzeszowa wydłuży się np. dwa albo pięć razy? Na szczęście nie! Przy założeniu, że czas przejazdu dla każdego odcinka drogi jest liniową funkcją natężenia ruchu (czyli jest postaci $an + b$, gdzie n to liczba kierowców, a a i b to ustalone liczby rzeczywiste), można wykazać, że sytuacja może zostać pogorszona co najwyżej o jedną trzecią, czyli tak, jak ma to miejsce w naszym przykładzie (ze 150 minut na 200). Jak to wykazano – to już zupełnie inna historia. Co ciekawe, za sformułowanie problemu, rozwiązanie go oraz kilka wyników w pobliżu przyznano w 2012 roku bardzo prestiżową nagrodę Gödla za wybitne osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej.

Okazuje się również, że nasze rozważania mają związek z informatyką. Śmiało można sobie wyobrazić, że zamiast miast mamy systemy komputerowe, które przesyłają między sobą nie tiry, a informacje i nie po drogach, ale łączami o pewnych przepustowościach – a efekty jak w paradoksie Braessa mogą być identyczne. Jak widać, matematycy, przynajmniej niektórzy, zajmują się wciąż pytaniami, które każdy z nas może zrozumieć i są istotne w praktyce.