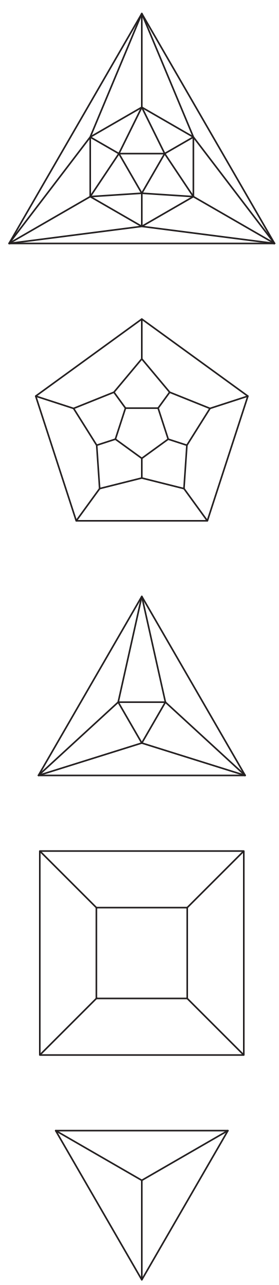
## Jakich wielościanów nie ma, a jakie są?

Kubuś Fatalista, bohater książki Denisa Diderota, spotkał pewnego razu rozpaczliwie płaczące dziecko. Na pytanie, co mu się stało, odpowiedziało, że kazano mu powiedzieć **A**. Cóż w tym złego? – dopytywał się Kubuś. – Bo jak powiem **A**, to każą mi powiedzieć **B** – poskarżył się malec.

Ludzie są jednak optymistami i pół wieku temu mówiliby raczej o tym, że gdy wejdzie się na kilka szczebli drabiny, to ma się ogromną ochotę wchodzić dalej. A dziś zapewne byłoby o tym, że gdy zaliczy się pewien poziom gry komputerowej, to przechodzi się do następnego.



Diagramy Schlegela wielościanów foremnych

Tu będziemy się jednak trzymać wersji Diderota.

**A** *Wykazać, że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.*

Jeśli wielościan ma choć jedną ścianę czworokątną, to ma co najmniej osiem krawędzi, bo z każdego wierzchołka tego czworokąta wychodzą co najmniej trzy krawędzie, z czego dwie do sąsiednich wierzchołków. Jeszcze więcej „przymusowych” krawędzi będzie, gdy któraś ze ścian będzie miała więcej niż 4 boki. Zostały nam wielościany o wszystkich ścianach trójkątnych. Jeśli tych ścian jest $n$, to krawędzi jest $3n/2$ (bo każda łączy dwie ściany), a taka liczba nie chce być równa 7.

**B** *Istnieje wielościan o $k$ krawędziach dla każdego $k$ większego od* 7 *i dla $k$ równego* 6.

Dla $k$ parzystych taki jest np. ostrosłup o podstawie $(k/2)$-kątnej. Jeśli natomiast obetniemy troszkę jeden z wierzchołków przy podstawie, to liczba krawędzi zwiększy się o 3, a więc otrzymamy wszystkie liczby nieparzyste, poczynając od 9.

**C** *Jakie są jeszcze ograniczenia na liczbę $w$ – wierzchołków, $s$ – ścian i $k$ – krawędzi?*

Ponieważ dowolne trzy punkty leżą na jakiejś płaszczyźnie, więc $w \geqslant 4$. Ale wówczas również $s \geqslant 4$. O liczbie $k$ już było. Liczby te są związane jeszcze zależnościami $3s \leqslant 2k$ i $3w \leqslant 2k$, bo każda krawędź należy do dwóch ścian, a ściany te są co najmniej trójkątne; podobnie każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a z każdego z nich wychodzi ich co najmniej trzy.

**D** *Czy istnieje tylko jeden wielościan o danych $w$, $s$, $k$?*

Oczywiście nie. Na przykład sześcian i czworościan z dwoma obciętymi rogami mają te same $w = 8$, $s = 6$, $k = 12$.

**E** Dalej będziemy zajmowali się wielościanami wypukłymi. Wielościan taki można określić w ten sposób, że gdyby dowolna z jego ścian była przezroczysta, to można byłoby tak zbliżyć do niej oko, że przez nią widziałoby się wszystkie inne ściany. Taki widok nazywa się *diagramem Schlegela.*

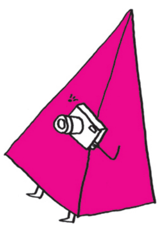
Skoro literą jest **E**, to teraz *wzór Eulera*: $w + s = k + 2$.

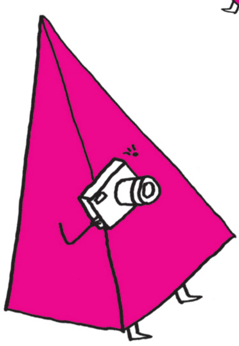
Korzystając z diagramu Schlegela, wzór ten uzasadnić nietrudno. Na początek uznajmy to, co leży dokoła diagramu, też za jego ścianę – trzeba tak zrobić, by diagram miał tyle ścian, co wielościan, z którego powstał. A teraz będziemy usuwali z niego krawędzie i wierzchołki, przestrzegając tego, by nie podzielić diagramu na rozłączne części: stale powinno być możliwe dotarcie po nieusuniętych jeszcze krawędziach do każdego z nieusuniętych dotąd wierzchołków.

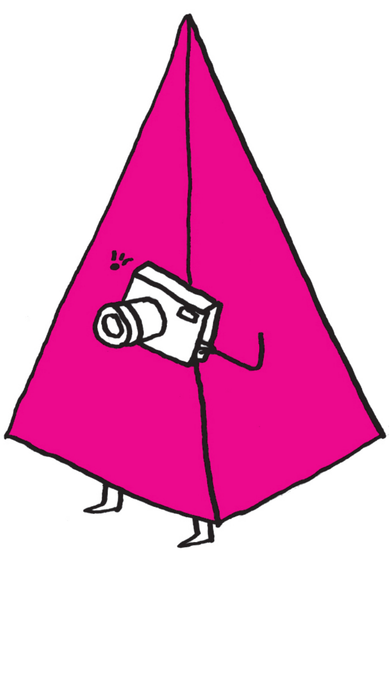
A sposoby są dwa:
1. gdy po obu stronach krawędzi są różne ściany (na początku w diagramie każda z krawędzi ma tę własność) – usuwamy ją, zostawiając kończące ją wierzchołki;
2. gdy krawędź kończy się wierzchołkiem, z którego nie wychodzi prócz niej żadna inna krawędź – usuwamy ją wraz z tym wierzchołkiem.

**Rozwiązanie zadania M 1467.**
Odp. Nie!

Załóżmy przeciwnie, że udało się pociąć naszą figurę. Wówczas jedno z cięć musiało przebiegać po poziomej osi symetrii figury, ponieważ każda połowa figury zawiera parzystą liczbę pól. Pokolorujmy pola figury jak standardową szachownicę (każde pole białe sąsiaduje z polami czarnymi, a pole czarne – z białymi). Ponieważ każdy fragment $1 \times 2$ zawiera jedno pole białe i jedno czarne, to różnica między liczbą pól białych i czarnych w każdej połowie figury powinna być równa zero, a w naszym przypadku wynosi 4.







Przypadek pierwszy zmniejsza o jeden liczbę krawędzi i liczbę ścian. Przypadek drugi – o jeden liczbę krawędzi i liczbę wierzchołków. Zatem w obu przypadkach odejmujemy po jedynce od obu stron wzoru Eulera.

A ponieważ w ten sposób możemy po kolei usunąć wszystkie krawędzie (sprawdźcie!), więc na końcu zostanie nam jeden wierzchołek i „otaczająca go” ściana. A ponieważ $1 + 1 = 0 + 2$, więc wzór Eulera został udowodniony.

Można za jego pomocą oszacować liczbę ścian i wierzchołków z drugiej strony. W **C** stwierdziliśmy, że $3w \leqslant 2k$. Wstawiając to do wzoru Eulera, otrzymujemy $\frac{2}{3}k + s \geqslant k + 2$, czyli $s \geqslant \frac{1}{3}k + 2$; podobnie $w \geqslant \frac{1}{3}k + 2$.

**F** Przy odcinaniu wierzchołków, w których zbiegają się 3 krawędzie (robiliśmy to już parę razy) – nazwijmy to operacją OD – liczba krawędzi rośnie o 3, liczba wierzchołków o 2 (bo 3 przybyły, a jeden ubył) i liczba ścian o 1.

Przeciwna operacja: dobudowywanie na trójkątnej ścianie ostrosłupa (uzasadnij, że można to zrobić, nie psując wypukłości!) – operacja DO – zwiększa liczbę krawędzi o 3, liczbę wierzchołków o 1 i liczbę ścian o 2 (znów $3 - 1$).

*Do wielościanu mającego $w$ wierzchołków, $s$ ścian i $k$ krawędzi udało się zastosować $m$ operacji* OD *i $n$ operacji* DO. *Ile teraz ma on wierzchołków, ścian i krawędzi?*

Prosty rachunek daje $w' = w + 2m + n$, $s' = s + m + 2n$, $k' = k + 3m + 3n$.

**G** (*twierdzenie Steinitza*) *Jeśli liczby $w$, $s$, $k$ spełniają warunki $w + s = k + 2$, $3w \leqslant 2k$ i $3s \leqslant 2k$, to istnieje wielościan mający $w$ wierzchołków, $s$ ścian i $k$ krawędzi.*

Dla dowodu wygodnie będzie przyjąć, że $k = 3q - r$, gdzie $r$ to 0, 1 lub 2. Z nierówności uzyskanych na koniec **E** mamy $w \geqslant q + 2 - \frac{1}{3}r$ i $s \geqslant q + 2 - \frac{1}{3}r$. Zatem (ponieważ $\frac{1}{3}r < 1$) mamy $w \geqslant q + 2$ i $s \geqslant q + 2$, z czego wynika, że liczby $m = w - q - 2$ i $n = s - q - 2$ są nieujemne i nadają się na krotności operacji OD i DO.

Inaczej: $w = m + q + 2$ i $s = n + q + 2$. Z wzoru Eulera mamy więc $m + q + 2 + n + q + 2 = 3q - r + 2$, czyli $q = (2 + r) + m + n$. Podstawiając to zamiast $q$, otrzymujemy

$$w = (4 + r) + 2m + n, \quad s = (4 + r) + m + 2n \quad \text{i} \quad k = (6 + 2r) + 3m + 3n.$$

Stąd twierdzenie będzie dowiedzione, gdy wskażemy wielościan, w którym $w = s = 4 + r$ i $k = 6 + 2r$. Ale taki jest ostrosłup o podstawie trój-, czworo- lub pięciokątnej. Są w każdym z nich ściany trójkątne (to te boczne) i wierzchołki trójścienne (przy podstawie), więc można stosować OD i DO.

**H** *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniał wielościan mający $w$ wierzchołków i $s$ ścian, są nierówności $w \leqslant 2s - 4$ i $s \leqslant 2w - 4$.*

Oczywiście, należy to twierdzenie sprowadzić do poprzedniego, a w tym celu wystarczy porachować, że – gdy jest spełniony wzór Eulera – nierówności z **C** są równoważne nierównościom w sformułowaniu tego twierdzenia.

**I** I co dalej? Dalsze litery alfabetu trzeba już sobie samemu wymyślić. Na przykład może to być próba znalezienia odpowiedzi na pytanie, jak – znając spełniające podane tu nierówności liczby $w$, $s$, $k$ – obliczyć, ile jest różnych wielościanów (to znaczy mających różne zestawy ścian) o $w$ wierzchołkach, $s$ ścianach i $k$ krawędziach. Dla 4, 4, 6 jest jeden, dla 8, 6, 12 – jak to już sprawdziliśmy – co najmniej dwa, a jak jest „w ogóle”?

To świetny temat na samodzielną pracę (a gdy ktoś jest uczniem – na nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki).

*Marek KORDOS*