Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

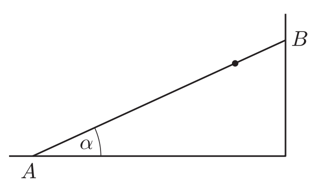
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2015

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

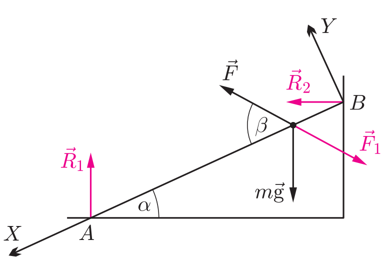
Przypominamy treść zadań:

594. Żuk pełznie po sztywnej słomce, opartej o gładką podłogę i gładką pionową ściankę (rys. 1). Słomka jest jednorodna, tworzy z poziomem kąt α, jej długość wynosi l, masa słomki jest zaniedbywalna w porównaniu z masą żuka m. Prędkość początkowa żuka w punkcie B wynosi v_0. Jak musi poruszać się żuk, aby słomka pozostawała nieruchoma? Po jakim czasie dopełznie on do punktu A?

595. W pionowo ustawionym cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze T_0. Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia. Gaz ściśnięto za pomocą tłoka, wykonując nad gazem pracę W. Następnie tłok puszczono i zatrzymał się on w nowym położeniu równowagi. Jaka jest temperatura końcowa gazu? Ciśnienie zewnętrzne jest stałe.



Rys. 1



Rys. 2

594. Wprowadźmy współrzędne XY jak na rysunku 2. Niech żuk znajduje się w odległości x od początku układu B. Siły działające na słomkę zaznaczono na rysunku kolorem. Są to siły reakcji R_1 i R_2 prostopadłe odpowiednio do podłogi i ścianki oraz siła F_1, jaką żuk działa na słomkę. Siłę ciężkości działającą na słomkę pomijamy zgodnie z treścią zadania. Słomka nie porusza się, więc siły działające na nią równoważą się: $\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$. Na żuka działa siła ciężkości oraz siła reakcji słomki $\vec{F} = -\vec{F}_1$, która tworzy ze słomką nieznany kąt β (siły te zaznaczono na rysunku na czarno). Równanie ruchu żuka ma postać $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + m\vec{g}$. Przyspieszenie $\vec{a}$ skierowane jest wzdłuż słomki. Stąd $R_2 = ma\cos\alpha$ oraz $R_1 = mg - ma\sin\alpha$. Momenty sił działających na słomkę względem dowolnego punktu równoważą się. Względem punktu B warunek ten ma postać: $lR_1\cos\alpha = xF_1\sin\beta$. Siły działające na żuka prostopadle do słomki równoważą się: $F_1\sin\beta = F\sin\beta = mg\cos\alpha$, zatem $-al\sin\alpha/g = x - l$, gdzie

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Wprowadzając nową zmienną $z = x - l$, otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz}{l\sin\alpha}.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = \sqrt{g/(l\sin\alpha)}$. Ruch żuka opisuje funkcja $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t + l$ z warunkami początkowymi: $x(0) = B + l = 0$ oraz $v(0) = \omega A = v_0$. Zatem $x = v_0\sin\omega t/\omega + l(1 - \cos\omega t)$. Kładąc $x = l$, otrzymujemy czas τ podróży żuka do końca słomki:

$$\operatorname{tg}(\omega\tau) = \frac{l\omega}{v_0}.$$

595. Niech ciśnienie zewnętrzne wynosi p_0. Oznaczmy objętości i temperatury gazu w kolejnych stanach równowagi przez V_0, V_1, V_2 oraz T_0, T_1, T_2. Zmiana energii wewnętrznej podczas ściskania gazu wynosi $\Delta U_1 = nc_v(T_1 - T_0) = W + p_0(V_0 - V_1)$ a po oswobodzeniu tłoka $\Delta U_2 = nc_v(T_1 - T_2) = -p_0(V_2 - V_1)$, gdzie molowe ciepło właściwe przy stałej objętości $c_v = 3R/2$. Całkowita zmiana energii wewnętrznej $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = nc_v(T_2 - T_0) = W + p_0(V_0 - V_2)$. Z równania Clapeyrona $p_0(V_0 - V_2) = nR(T_0 - T_2)$. Szukana temperatura końcowa wynosi

$$T_2 = T_0 + \frac{2W}{5nR}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 588 ($WT = 2{,}29$) i 589 ($WT = 3{,}23$) z numeru 12/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,76
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Marian Łupieżowiec	Gliwice	26,26
Michał Koźlik	Gliwice	22,60
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22

Witamy ponownie obecnego po przerwie w zestawieniu pana Bogusława Mikielewicza, życzymy także sukcesów nowym uczestnikom zmagań ligowych: panom Jędrzejowi Biedrzyckiemu, Karolowi Łukanowskiemu i Janowi Zambrzyckiemu.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 691 ($WT = 2{,}17$) i 692 ($WT = 1{,}80$) z numeru 12/2014

Piotr Kumor	Olsztyn	47,64
Wojciech Maciak	Warszawa	47,06
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Janusz Olszewski	Warszawa	35,83
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Paweł Najman	Kraków	31,92

Piotr Kumor – superWeteran Ligi – konkretnie: czterokrotny; właśnie przekroczył magiczną linię 44 po raz dwunasty. Zaś pan Wojciech Maciak zaokrąglił liczbę członków Klubu 44 M do 5^3.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2015

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bezkwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m. Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

697. Wygodnie będzie zacząć od przypadku, gdy losowanie jest ze zwracaniem. Wynik losowania to wówczas para uporządkowana (k, m) dzielników liczby N. Zdarzenia A, B identyfikujemy z odpowiednimi podzbiorami zbioru wszystkich takich par. Gdy para (k, m) należy do A, liczby k, m są względnie pierwszymi dzielnikami liczby N, zatem także iloczyn $q = km$ jest dzielnikiem N. Oczywiście k dzieli q, więc para (k, q) należy do B.

Na odwrót, gdy (k, q) jest dowolną parą ze zbioru B (więc $k \mid q$), wtedy iloraz $m = q/k$ też jest dzielnikiem N, i to względnie pierwszym z k (bo gdyby k, m miały wspólny dzielnik $p > 1$, liczba q, więc i N, byłaby podzielna przez p^2, wbrew założeniu zadania). Zatem para (k, m) należy do A.

Opisane operacje $(k, m) \mapsto (k, q)$, $(k, q) \mapsto (k, m)$ są wzajemnie odwrotne. Stąd wynika, że zbiory A i B są równoliczne; zaś zdarzenia A, B są (przy losowaniu ze zwracaniem) jednakowo prawdopodobne.

Losowanie bez zwracania eliminuje dublety, tzn. pary postaci (ℓ, ℓ), gdzie $\ell \mid N$. W poprzednim modelu, do zbioru A należała tylko jedna taka para $(1, 1)$; do B należały wszystkie. Więcej par zostało wyeliminowanych z B, wobec czego (przy losowaniu bez zwracania) zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż B.

698. Skorzystamy ze znanej nierówności $\left(\sum x_i\right)\left(\sum 1/x_i\right) \geqslant n^2$; we wszystkich symbolach sumowania przyjmujemy $i = 1, \ldots, n$. Przy warunku $\sum x_i = 1$ mamy więc $\sum 1/x_i \geqslant n^2$. Dla każdej liczby rzeczywistej t słuszne jest oszacowanie $\lfloor t \rfloor > t - 1$. Stąd

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor > \sum \left(\frac{1}{x_i} - 1 \right) \geqslant n^2 - n,$$

czyli

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor \geqslant n^2 - n + 1.$$

W uzyskanej zależności można osiągnąć równość, biorąc na przykład

$$x_1 = \ldots = x_{n-1} = \frac{n^2}{n^3 - 1}, \qquad x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}.$$

Widać, że $\sum x_i = 1$. Dla $i = 1, \ldots, n-1$ mamy przy tym

$$\left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor n - \frac{1}{n^2} \right\rfloor = n - 1,$$

zaś dla $i = n$:

$$\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{n + 1} \right\rfloor = n.$$

Tak więc $\sum \lfloor 1/x_i \rfloor = (n - 1)(n - 1) + n = n^2 - n + 1$ (dla tak określonych liczb x_i; można dać wiele innych przykładów). Wniosek: liczba $n^2 - n + 1$ to szukane minimum.