

## Demon Laplace'a

Szymon CHARZYŃSKI

Kopalnią wiedzy o zaćmieniach Słońca jest strona prowadzona przez NASA: <http://eclipse.gsfc.nasa.gov>.

7 października 2135 roku Księżyc na 4 minuty i 43 sekundy przesłoni Słońce i większość terytorium naszego kraju na chwilę ogarnie ciemność. Wcześniej zdarzą się zaćmienia częściowe. Wszystkich zaćmień Słońca, widocznych w różnych częściach świata, będą w bieżącym tysiącleciu setki i szczegółowy przebieg każdego z nich można przewidzieć na kilkaset lat do przodu. Jak to się dzieje, że potrafimy tak precyzyjnie te zjawiska przewidywać?

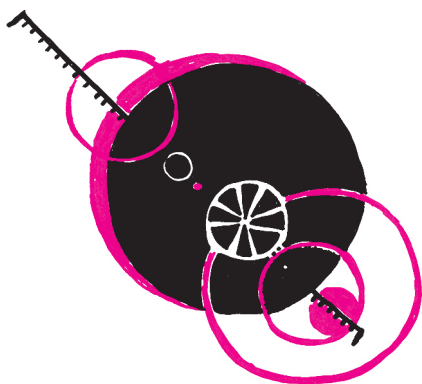
Sukces przewidywań opiera się na dwóch fundamentach. Po pierwsze, dzięki bardzo dokładnym obserwacjom astronomicznym znamy bardzo precyzyjnie aktualny stan Układu Słonecznego, czyli masy jego głównych składników oraz ich położenia i prędkości. Po drugie, od czasów Isaaca Newtona znamy prawa rządzące ruchem ciał niebieskich, czyli zasady dynamiki i prawo powszechnego ciążenia. Prawa te mają tę własność, że zadanie warunków początkowych jednoznacznie determinuje całą przyszłą (ale również przeszłą) ewolucję układu fizycznego. Mówimy, że te prawa są *deterministyczne*. Opierając się zatem na znajomości aktualnego stanu Układu Słonecznego, możemy, rozwiązując równania ruchu, przewidzieć jego stan w przyszłości, a w szczególności znaleźć te chwile, kiedy Słońce, Księżyc i Ziemia ustawią się (prawie) w jednej linii i Księżyc całkowicie lub częściowo przesłoni nam Słońce.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy przebieg wszystkich zjawisk daje się przewidywać w taki deterministyczny sposób. Bardzo śmiałą hipotezę, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, sformułował w 1814 roku Pierre-Simon Laplace. Stwierdził on, że gdyby pewien intelekt był w stanie poznać stan wszystkich składników naszego wszechświata, znał wszystkie prawa, którym podlegają, i gdyby był w stanie przeanalizować te wszystkie dane, to mógłby przewidzieć losy wszystkich tych składników. Taki intelekt znałby całą przeszłość i całą przyszłość. Choć sam Laplace nie nazwał tego intelektu demonem, to obecnie jego koncepcja funkcjonuje w kulturze jako tytułowy *demon Laplace'a*. Tak narodził się paradygmat klasycznego determinizmu.

Była to wizja świata rządzonego ściśle deterministycznymi prawami, których, być może, jeszcze do końca nie znamy, ale było to swoiste wyznanie wiary, że takie deterministyczne prawa istnieją. Poznanie tych praw miałooby natomiast pozwolić na nieograniczoną moc przewidywania przebiegu zjawisk. Paradygmat klasycznego determinizmu wywarł ogromny wpływ na kolejne pokolenia przyrodników, czego przejawem jest chociażby powszechnie znany fragment listu Einsteina do Maksa Borna: *Ty wierzysz w Boga, który gra w kości, ja w panowanie i porządek w świecie obiektywnie istniejącym, który próbuję ująć na drodze dzikiej spekulacji*. Nie jest to wyznanie wiary w Boga, w którego Einstein nie wierzył, i używał tego pojęcia tylko jako metafory, lecz właśnie wyznanie wiary w determinizm.

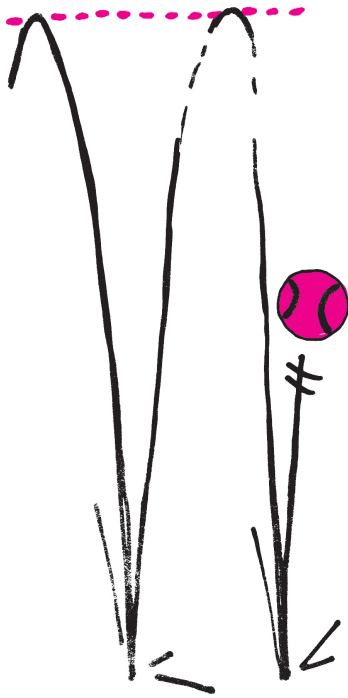
Nie wszystkim jednak podobała się idea absolutnego determinizmu. Świat, w którym jest miejsce dla demona Laplace'a, podąża jedyną możliwą trajektorią wyznaczoną przez deterministyczne prawa. Realizuje się tylko jedna możliwa historia. Czy w takim świecie jest miejsce dla istoty obdarzonej wolną wolą? Dla niektórych idee klasycznego determinizmu i wolnej woli są nie do pogodzenia, bo skoro cała przyszłość jest jednoznacznie zdeterminowana i możliwa do przewidzenia, to i wynik każdego naszego życiowego wyboru można zawczasu obliczyć. Gdzie tu miejsce na akt woli? Sprzeczność ta nie dla wszystkich jest jednak oczywista, zależy to bowiem od tego, co sobie ktoś wyobraża pod pojęciem wolnej woli, bo o ile pojęcie klasycznego determinizmu jest dosyć jednoznacznie zdefiniowane, to pojęcie wolnej woli może wywoływać różne skojarzenia.

Jeżeli mamy układ podlegający ściśle deterministycznym prawom, który potrafimy w laboratorium przygotować w powtarzalny sposób, za każdym razem w tym samym stanie, to on za każdym razem zachowa się tak samo. Jeżeli, na przykład, będziemy identyczne piłeczki pingpongowe upuszczać z tej samej



wysokości w tym samym polu grawitacyjnym na podłogę, która ma za każdym razem te same własności elastyczne, i powietrze będzie miało zawsze ten sam skład, ciśnienie i temperaturę, to piłeczka po odbiciu wleci zawsze na tę samą wysokość. Tak działa klasyczny determinizm.

Nie da się takich całkowicie powtarzalnych eksperymentów przeprowadzać na układach fizycznych, które podejrzewamy o posiadanie wolnej woli, ponieważ układy te zwykle mają również pamięć, dlatego każdy kolejny eksperyment jest przeprowadzany na układzie bogatszym, chociażby o doświadczenie poprzedniego eksperymentu. Gdy zapytamy dwa razy licealistę, którą z dwóch, znanych tylko z widzenia koleżanek, chętniej zaprosiłby do znajomych na portalu społecznościowym, to możemy uzyskać dwie sprzeczne odpowiedzi. Czasem wystarczy skwitować pierwszą odpowiedź dezaprobującym grymasem twarzy, żeby, pytając drugi raz, uzyskać przeciwstawną odpowiedź. Wyobraźmy sobie jednak następujący eksperyment myślowy – współczesną wersję demona Laplace’a, czyli mogącego zapisać stan wszechświata w jakiejś chwili (tak jak w grach komputerowych „zasejwować”) i następnie wczytywać i puszczać wielokrotnie od tej zapisanej chwili. Demon wykona eksperyment na naszym licealiście. Wyobraźmy sobie, że naszemu królikowi doświadczalnemu wpadły w oko dwie koleżanki z innej klasy i waha się, którą zaczepić, aż wreszcie któregoś wieczoru rozdarty wewnętrznie młodzieniec decyduje się zaprosić do znajomych na portalu społecznościowym jedną z nich. Znajomość się rozwija, po latach jest ślub, dzieci, wnuki itp. Załóżmy teraz, że demon zapisał stan całego wszechświata, np. w przeddzień podjęcia decyzji przez licealistę, wczytuje ten stan i puszcza historię w ruch jeszcze raz, a nawet wiele razy. Oczywiście, według poglądu Laplace’a historia potoczy się za każdym razem tak samo. Czy jeżeli jednak licealista podejmie za każdym razem tę samą decyzję, będzie to oznaczało, że decyzja ta nie była „wolna”?



Klasyczny prosty przykład chaotycznej dynamiki stanowi układ dyskretny oparty na odwzorowaniu logistycznym, danym wzorem  $f(x) = k \cdot x \cdot (1 - x)$ , dla  $k \in [0, 4]$  przekształcającym przedział  $[0, 1]$  w siebie. Warunkiem początkowym jest liczba  $x_0 \in [0, 1]$ . Trajektorię układu stanowi ciąg zadany rekurencyjnie  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Tak zdefiniowany układ dynamiczny przejawia zasadniczo różne zachowania w zależności od wartości parametru  $k$ . Dla  $k \in [0, 3]$  wszystkie ciągi, niezależnie od wartości  $x_0$  dążą do tej samej granicy (zależnej jedynie od  $k$ ). Dla  $k > 3$  dynamika się komplikuje i w pewnych zakresach staje się chaotyczna. W szczególności np. jest chaotyczna dla  $k = 4$ , co przejawia się, między innymi, tym, że jeżeli wybierzemy dwie dowolnie bliskie wartości początkowe, np.  $x_0 = 0,3$  oraz  $y_0 = 0,300001$ , to ciągi, które z nich powstaną, będą się niewiele początkowo różniły, ale od pewnego miejsca zupełnie się rozjadą. W szczególności mamy  $x_{10} = 0,043422$ ,  $y_{10} = 0,042968$ , czyli różnica jest wciąż stosunkowo niewielka, ale już  $x_{20} = 0,941785$ ,  $y_{20} = 0,033125$  i tutaj różnica jest już znaczna. Gdybyśmy wzięli wartości początkowe różniące się jeszcze mniej niż o  $0,000001$ , to być może trajektorie pozostawałyby do siebie zbliżone przez większą liczbę iteracji, ale i tak prędzej czy później się rozjadą.

Pisaliśmy o tym m.in. w *Delcie* 10/2010.

Zachęcam Cię, Czytelniku, do poeksperymentowania z tym odwzorowaniem. Jest to bardzo pouczająca zabawa.

Laplace przedstawił swoją koncepcję w czasach, kiedy mechanika klasyczna stanowiła trzon fizyki, a jej sformułowanie było jednym z najważniejszych przełomów w historii nauki, z czego zapewne zdawał sobie sprawę. Trudno się zatem dziwić, że on i jemu współcześni ulegli pokusie przyjęcia przekonania, że oto dotarli do pewnej ostatecznej prawdy o świecie. Laplace nie mógł oczywiście wiedzieć, jakie kolejne przełomowe odkrycia po mechanice klasycznej przyniesie przyszłość i że odkrycia te spowodują odesłanie jego koncepcji do lamusa.

Jakie odkrycia przyczyniły się do unicestwienia demona Laplace’a? Zanim zajmiemy się tym, które zadało mu decydujący cios, przyjrzymy się odkryciu, które znacznie jego demoniczną moc osłabiło. W XX wieku stwierdzono, że *determinizm* i *przewidywalność* to nie to samo. Odkryto *chaos deterministyczny*. Okazuje się, że nawet jeśli prawa opisujące dany układ są deterministyczne, to w pewnych sytuacjach ściśle przewidzenie zachowania układu jest praktycznie niemożliwe. Jedną z manifestacji chaosu jest duża wrażliwość zachowania układu chaotycznego na dowolnie małe zmiany stanu początkowego. Jeżeli mamy dwie kopie takiego układu, które w chwili początkowej różnią się dowolnie mało, ale nie są dokładnie takie same, to ich ewolucja przebiega w taki sposób, że różnice między nimi bardzo szybko rosną i po pewnym czasie dwie kopie układu zachowują się w sposób zupełnie niepodobny. Ponieważ rzeczywiste pomiary wykonuje się zawsze z pewną skończoną dokładnością, to w praktyce nigdy nie znamy początkowego stanu układu dokładnie. W konsekwencji, nawet jeżeli znamy ściśle deterministyczne prawa, którym podlega nasz układ, to nie będziemy w stanie przewidzieć zachowania się układu w długiej perspektywie czasowej, właśnie dlatego, że nie wiemy dokładnie, do którego ze stanów początkowych mieszczących się w ramach naszej niepewności pomiarowej te prawa zastosować.

Opisane zjawisko oznacza, że jest niezwykle istotne, w jaki sposób nasz demon zapisuje stan wszechświata. Jeżeli zapisując, dokonuje jakichś przybliżeń, np. zaokrągla liczby, używając liczb binarnych o skończonej precyzji, tak jak to się robi standardowo w pamięci komputera, to może się okazać, że po wczytaniu tych danych i puszczeniu historii od nowa, potoczy się ona inaczej, nawet jeżeli

jest ściśle deterministyczna. Zresztą w taki, mniej więcej, sposób ta własność układów chaotycznych została odkryta. Edward Lorenz w 1961 r. badał własności pewnego układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych, który stał się potem bardzo znany i nosi dziś jego nazwisko. Znajdował rozwiązania tego układu na komputerze. Pewnego razu powtórzył numeryczną procedurę dla, jak sądził, tego samego zestawu danych początkowych, w celu sprawdzenia poprawności metod numerycznych. Rozwiązania znalezione przez komputer początkowo się pokrywały, ale po pewnym czasie zaczęły się rozjeżdżać, aż wreszcie stały się zupełnie niepodobne. Lorenz w pierwszej chwili zinterpretował te wyniki jako skutek błędu, ale szybko zrozumiał, że żadnej pomyłki nie było. Okazało się, że powtarzając obliczenia, jako stan początkowy wprowadził liczby, które były zaokrągleniem do części tysięcznych liczb, które pierwotnie były w pamięci komputera zapisane z dokładnością do 6 cyfr po przecinku. Ta drobna różnica w danych początkowych okazała się mieć kluczowe znaczenie.

Edward Lorenz zajmował się modelowaniem procesów zachodzących w atmosferze, czyli meteorologią. Atmosfera ziemską jest właśnie przykładem układu chaotycznego, którego zachowania w dłuższej perspektywie czasowej nie da się przewidzieć. Dlatego możemy dokładnie obliczyć, o której godzinie zacznie się zaćmienie 7 października 2135 roku, ale absolutnie niemożliwe jest dziś przewidzenie, czy w podziwianiu tego pięknego widowiska nie przeszkodzą nam chmury.

Może jednak, gdyby nasz demon znał aktualny stan wszechświata z nieskończoną dokładnością, to byłby w stanie przewidzieć dokładnie całą jego przyszłość (wliczając w to np. pogodę za 120 lat)? Niestety, nie. Według naszej obecnej wiedzy o wszechświecie nie ma w nim miejsca dla demona Laplace'a.

Decydującego argumentu przeciwko demonowi dostarcza mechanika kwantowa. Teoria ta przewiduje istnienie w przyrodzie zjawisk czysto losowych. Rozważmy prosty przykład i wyobraźmy sobie nietrwałe jądro atomowe (np. jądro uranu, czyli pierwiastka naturalnie występującego w skorupie ziemskiej). Nietrwałość oznacza, że jądro to ulega *spontanicznemu* rozpadowi promieniotwórczemu, w wyniku którego powstaje inne jądro i emitowane są jakieś cząstki. *Spontaniczność* rozpadu oznacza, że konkretna chwila, w której on nastąpi, nie jest w żaden sposób określona. Określone jest *prawdopodobieństwo na jednostkę czasu* zajścia takiego rozpadu, które wyznacza się, obserwując duże próbki takich pierwiastków. Mając, na przykład, kilogram atomów takiego pierwiastka, możemy zmierzyć, po jakim czasie zostanie połowa początkowej liczby atomów. Jest to *czas połowicznego zaniku*, czyli parametr różny dla różnych pierwiastków, określający statystyczne własności dużych próbek, pozwalający wyznaczyć wspomniane prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu. Możemy więc określić, po jakim czasie jaka część naszej próbki ulegnie rozpadowi, ale nie da się określić, które konkretnie jądra z próbki się rozpadną. Oznacza to, że gdyby nasz demon zapisywał stan wszechświata w jakiejś chwili i wybrał sobie do obserwacji jakieś konkretne nietrwałe jądro, to puszczając historię od tej chwili, mógłby za każdym razem zaobserwować inny czas, po jakim jądro się rozpadło. Mechanika kwantowa pozwala jedynie ściśle przewidzieć, do jakiego rozkładu będzie dążył rozkład wyników tych pomiarów, jeżeli wykonamy takich eksperymentów bardzo wiele. Teoria chaosu nauczyła nas już, że drobne zmiany w układzie w jakiejś chwili mogą przełożyć się na ogromne zmiany za jakiś czas. Więc istnienie losowych procesów nawet na poziomie mikroskopowym powoduje, że historia Wszechświata zapisanego przez demona w jakiejś chwili i puszczana wielokrotnie od nowa od tego momentu może przebiec za każdym razem inaczej.

Przeciwko takiej probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej protestował Albert Einstein we wspomnianym liście. Próbą ratowania determinizmu były teorie *parametrów ukrytych*. Pomysł był taki, że mechanika kwantowa jest niepełną teorią, a prawa, które ściśle determinują wszystkie pozornie losowe procesy, takie jak rozpady promieniotwórcze, są przed nami na razie ukryte. Gdyby nasz demon znał wartości tych ukrytych parametrów, to wiedziałby, kiedy



#### Rozwiązanie zadania F 883.

Częstotliwość fotonów emitowanych przez spoczywający atom wodoru i, podobnie, deuteru jest proporcjonalna do iloczynu masy zredukowanej układu elektron-jądro,  $\mu$ . Masa zredukowana układu elektron-jądro o masie  $M$  wynosi

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}.$$

Wynika stąd, że wszystkie częstotliwości widma deuteru są  $A$  razy większe od częstotliwości występujących w widmie wodoru:

$$A = \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) / \left(1 + \frac{m_d}{m_p}\right).$$

Po podstawieniu wartości mas otrzymujemy  $A = 1,0002723$ , a więc wartość bardzo bliską 1. Gdyby zinterpretować wzrost obserwowanych częstotliwości o czynnik  $A$  jako skutek zjawiska Dopplera (postępowego ruchu atomu z prędkością  $v$ ), to  $A$  powinno być równe  $1 + v/c$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła, i dla  $A = 1,0002723$  otrzymamy wartość  $v = 81,7$  km/s, odpowiadającą ruchowi atomu wodoru w kierunku obserwatora (taka prędkość średnia atomu wodoru odpowiada temperaturze ok.  $2,7 \cdot 10^5$  K).

Więcej o nierównościach Bella można przeczytać w *Delcie* 5/2001 w artykule Andrzeja Dragana *A może jednak ukryty determinizm?*

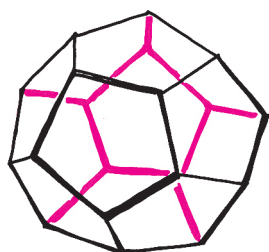
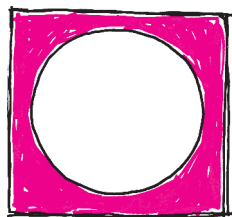
które jądro się rozpadnie. Okazało się, że hipoteza istnienia parametrów ukrytych daje się testować doświadczalnie, dzięki twierdzeniu udowodnionemu w 1964 roku, znanemu jako *nierówności Bella*. Twierdzenie to mówi, że jeżeli wyniki pewnych pomiarów byłyby determinowane przez jakieś ukryte parametry, to częstości występowania tych wyników spełniałyby pewne nierówności. Mechanika kwantowa przewiduje łamanie tych nierówności. W wielu przeprowadzonych eksperymentach wykazano, że rzeczywiste układy fizyczne zachowują się zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej, łamiąc nierówności Bella.

Musimy się więc pogodzić z tym, że w przyrodzie występują pewne niedeterministyczne procesy, których losowość nie jest odzwierciedleniem naszej niepełnej wiedzy o układzie, ale jest ich wewnętrzną, nieusuwalną cechą. Świat nie jest całkowicie deterministyczny. Hipoteza Laplace'a okazała się zbyt daleko idąca. Czy uratowaliśmy zatem wolną wolę? Czy zastąpienie czystego determinizmu determinizmem z domieszką czystego przypadku kogoś pociesza?

## Na czym stoi matematyka?

*Wiktor BARTOL*

Matematyka bardzo się w XIX wieku zmieniła. Algebra, badająca dotąd przede wszystkim metody rozwiązywania równań wielomianowych, dzięki pracom Evariste'a Galois, George'a Boole'a i innych wytworzyła struktury abstrakcyjne: grupy, pierścienie, algebry Boole'a, oderwane od obliczeń liczbowych, reprezentujące za to pewne ogólne własności działań (na dowolnych obiektach). Geometria utraciła euklidesową jednoznaczność, odnajdując się w światach dotąd nieznanymi i nieprzewidywanymi, zwanych geometriami nieeuklidesowymi. Analiza, nabierając coraz bardziej potrzebnej ścisłości, wyszła poza granice intuicji, uwzględniając szerszy repertuar funkcji (niegdyś uważanych za ciągle z definicji) i dopuszczając zaskakujące konstrukcje, jak choćby funkcje wszędzie ciągłe i nigdzie nieróżniczkowalne. I wreszcie w drugiej połowie XIX wieku badania Georga Cantora nad reprezentacjami funkcji za pomocą szeregów doprowadziły do otwarcia matematycznych drzwi dla starannie dotąd omijanej nieskończoności aktualnej, nieskończoności „istniejącej”, danej w całości – w odróżnieniu od potencjalnej, czyli takiej, która oznacza jedynie możliwość nieograniczonego powiększania zbioru. Cantor pokazał, że można sensownie porównywać wielkości zbiorów nieskończonych, operować nimi tak, jakby były dobrze określonymi obiektami matematycznymi.



Niestety, okazało się, że pojęcie zbioru (w szczególności nieskończonego) dobrze określone nie było. Bertrand Russell wskazał na sprzeczność wyrosłą z nieprecyzyjnego rozumienia zbioru. Istotnie, jeśli możemy dowolnie tworzyć zbiory, to w szczególności możemy utworzyć zbiór  $Z$  wszystkich tych zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Inaczej mówiąc,  $Z = \{X : X \notin X\}$ . Próba odpowiedzi na pytanie, czy  $Z \in Z$ , jak nietrudno stwierdzić, prowadzi do sprzeczności. Nieco wcześniej, pod koniec XIX wieku, Cesare Burali-Forti pokazał, że nie istnieje, że nie można utworzyć zbioru wszystkich liczb porządkowych. Sprzeczności tego rodzaju pojawiły się także w logice. Czy zatem swoboda używania nader abstrakcyjnych pojęć, w tym nieskończoności aktualnej, powinna być matematykom odebrana?

Zagrożenie pojawieniem się sprzeczności wywołało różne reakcje w środowisku matematycznym. Leopold Kronecker zaproponował, by za fundament matematyki przyjąć liczby naturalne, unikając w ten sposób wszystkiego, czego nie da się z nich wyprowadzić. Wielu matematyków gotowych było zrezygnować z tej części matematyki, która dopuszczała zbiory aktualnie nieskończone, a nawet ze wszystkiego, czego nie dawało się konstruktywnie pokazać (nie tylko *wykazać*). Intuicjoniści, jak określa się zwolenników jednej z takich konstruktywistycznych filozofii, nie uznawali tzw. prawa wyłączonego środka,