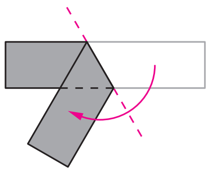
Zmieści się?

Joanna JASZUŃSKA

1. Prostokątny pasek papieru można przykryć pewnym kołem. Pasek ten składamy wzdłuż dowolnej prostej (rys. 1). Czy nadal można go przykryć tym samym kołem?



Rys. 1

2. Czy trójkąt może zmieścić się w kole mniejszym od koła na nim opisanego?

3. a) Kwadrat o boku 2 dzielimy na cztery kwadraty jednostkowe i w każdy z nich wpisujemy koło. Koło K ma środek w środku kwadratu i jest styczne zewnętrznie do każdego z pozostałych kół (rys. 2). Wyznacz jego promień r.

b) Wyznacz promień analogicznej kuli K dla sześcianu o krawędzi 2 i ośmiu kul o średnicy 1 (rys. 3).

c) Wyznacz promień analogicznej n-wymiarowej kuli K dla n-wymiarowego hipersześcianu o krawędzi 2 i 2^n kul n-wymiarowych o średnicy 1.

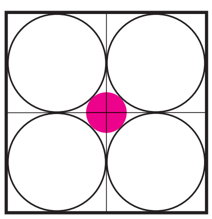
4. Poczta w Bęcwalonii nie przyjmuje do przesyłki paczek dłuższych niż 1 metr; firmy kurierskie akurat strajkują. Pan Fletowski chce przesłać pilnie swój cenny flet o długości 1,65 m. Czy istnieje możliwość przesłania fletu?

5. Poczta w Pudełkolandii przewozi tylko prostopadłościenne paczki, a opłata za przesyłkę równa jest sumie długości, szerokości i wysokości opakowania. Czy można zaoszczędzić, umieszczając pudełko o większej sumie długości wymiarów wewnątrz pudełka o mniejszej sumie?

Analogiczny problem dla czworościanów opisano w *deltoidzie* 9/2010.

Rozwiązania

R1. Tak. Koło przykrywające pasek można składać wraz z nim, wtedy złożony pasek mieści się w złożonym kole, które można przykryć kołem niezłożonym. □

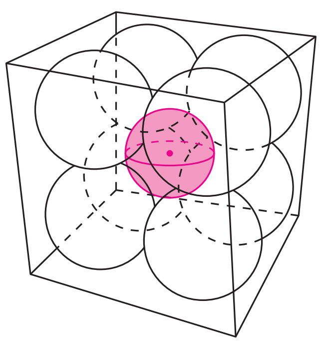


Rys. 2

R2. Tak, dowolny trójkąt rozwartokątny zmieści się w kole, którego średnicą jest jego najdłuższy bok – cięciwa koła opisanego. □

R3. a) Średnica każdego z czterech kół równa jest 1, a przekątna kwadratu jednostkowego ma długość $\sqrt{2}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. □

b) Średnica każdej z ośmiu kul równa jest 1, a przekątna sześcianu jednostkowego ma długość $\sqrt{3}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. □



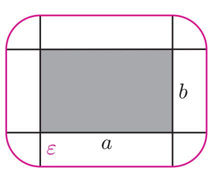
Rys. 3

c) Średnica każdej z 2^n kul równa jest 1, a przekątna hipersześcianu jednostkowego ma długość $\sqrt{n}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{n}-1)$. □

Dla $n > 4$ uzyskujemy $r > \frac{1}{2}$, więc „mała” kulka K jest większa od każdej z „dużych” kul, a dla $n > 9$ mamy $r > 1$, czyli kula K wystaje poza hipersześcian!

R4. Tak. Pan Fletowski może umieścić flet wzdłuż głównej przekątnej sześciennego pudła o krawędzi długości 1 m – jej długość to $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ m. □

R5. Nie. Rozważmy ε-*otoczkę* pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, czyli zbiór złożony z wszystkich punktów z jego wnętrza oraz punktów odległych od niego o mniej niż ε (rys. 4). Ma ona kształt większego prostopadłościanu o zaokrąglonych krawędziach i rogach. Jej objętość równa jest



Rys. 4. ε-otoczka prostokąta, jej pole równe jest $ab + 2(a+b)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$.

abc (objętość wyjściowego prostopadłościanu) +
$+\,2(ab+bc+ca)\varepsilon$ (objętości prostopadłościanów zbudowanych na ścianach) +
$+\,(a+b+c)\pi\varepsilon^2$ (fragmenty na równoległych krawędziach sumują się do walców o promieniu podstawy ε) +
$+\,\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ (fragmenty na rogach prostopadłościanu sumują się do kuli o promieniu ε).

Zauważmy, że jeśli pudełko o wymiarach $d \times e \times f$ da się włożyć do pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, to również ε-otoczka pierwszego mieści się w ε-otoczce drugiego. To z kolei oznacza, że różnica objętości jest nieujemna:

$$abc + 2(ab+bc+ca)\varepsilon + (a+b+c)\pi\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 - def - 2(de+ef+fd)\varepsilon - (d+e+f)\pi\varepsilon^2 - \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \geqslant 0.$$

Załóżmy, że $a+b+c \neq d+e+f$. Powyższa różnica objętości jest wówczas wielomianem stopnia 2 zmiennej ε. Skoro ma on wartość nieujemną dla każdego $\varepsilon > 0$, to musi mieć dodatni współczynnik przy najwyższej potędze ε. Stąd $a+b+c > d+e+f$, co kończy dowód. □

Zadanie 4 pochodzi z książki K. Ciesielskiego *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*, Omega, 2012.