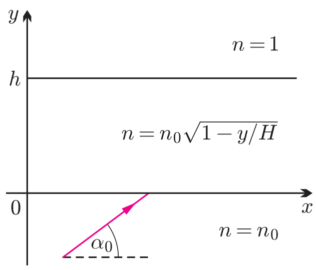
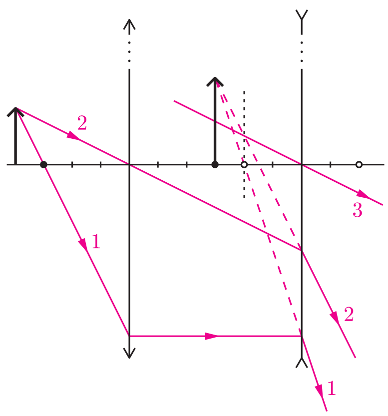
Klub 44

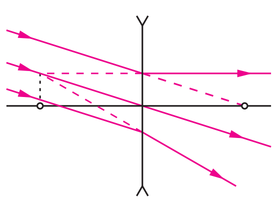
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2015



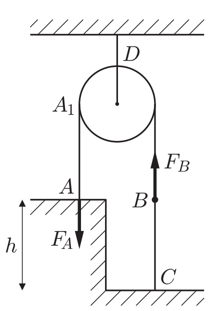
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 600, 601

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

600. Naczynie o objętości $2V = 20$ l rozdzielone jest na dwie równe części nieruchomą przegrodą. Do jednej części naczynia wprowadzono argon o masie $m_A = 20$ g, do drugiej wodór o masie $m_H = 2$ g. Przez przegrodę może przenikać tylko wodór. Jakie ciśnienia ustalą się w obu częściach naczynia po ustaleniu się stanu równowagi? Temperatura w części naczynia zawierającej argon wynosi $T_1 = 300$ K, w drugiej części $T_2 = 600$ K. Masy molowe argonu i wodoru są odpowiednio równe $m_A = 40$ g/mol, $m_H = 2$ g/mol.

601. Między dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania $n_0 > 1$ i $n_1 = 1$ znajduje się warstwa ośrodka, w którym współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem $n = n_0\sqrt{1-y/H}$, gdzie $H = \text{const}$ (patrz rys. 1). Grubość warstwy wynosi $h = H(1 - 1/n_0^2)$. Z ośrodka o współczynniku załamania n_0 wpada do niejednorodnej warstwy promień światła. Dla jakich wartości kąta α_0 promień wróci do optycznie gęstszego ośrodka? Dla jakiej wartości tego kąta odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia będzie największa?

(*Wskazówka*: rozważ ruch punktu materialnego, który porusza się po torze promienia.)

Rozwiązania zadań z numeru 2/2015

Przypominamy treść zadań:

592. Układ składa się z dwóch cienkich soczewek o wspólnej osi optycznej: skupiającej o ogniskowej $f_1 = 3$ cm i rozpraszającej o ogniskowej $f_2 = -2$ cm, ustawionych w odległości $d = 6$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości $x_1 = 4$ cm od soczewki skupiającej. Znaleźć konstrukcyjnie położenie obrazu po przejściu promieni przez układ.

593. Cienki, nierozciągliwy łańcuszek o zaniedbywalnie małych ogniwach przerzucony jest przez nieruchomy bloczek (zob. rys. 4). Końce zwisających z bloczka części łańcuszka leżą na stole i na podłodze, przy czym część leżąca na stole jest wystarczająco długa i ułożona w mały kopczyk wokół punktu A (odcinek AA_1 jest pionowy). Znaleźć ustaloną prędkość wiszącej części łańcuszka. Blat stołu znajduje się na wysokości h nad podłogą. Tarcie zaniedbujemy.

592. Niech pierwszy promień wychodzący z przedmiotu przechodzi przez ognisko soczewki skupiającej, jego dalszy bieg przedstawiony jest na rysunku 2. Drugi promień przechodzi przez środek soczewki skupiającej, chcemy znaleźć jego kierunek po przejściu przez soczewkę rozpraszającą. Wiemy, że gdy na soczewkę rozpraszającą pada równoległa wiązka światła pod pewnym kątem do osi optycznej, przedłużenia promieni przechodzących przez soczewkę przecinają się w jej płaszczyźnie ogniskowej (rys. 3). Na rysunku 2 narysujmy trzeci promień pomocniczy, który przechodzi przez środek soczewki rozpraszającej równolegle do promienia drugiego. Przedłużenie promienia 2 przecina się z promieniem 3 w płaszczyźnie ogniskowej soczewki rozpraszającej, a z promieniem 1 tam, gdzie znajduje się szukany obraz przedmiotu. Aby sprawdzić poprawność konstrukcji, możemy wykonać obliczenia. Obraz w soczewce skupiającej powstaje w odległości $y_1 = x_1 f_1/(x_1 - f_1) = 12$ cm. Jest on przedmiotem pozornym dla drugiej soczewki: $x_2 = d - y_1 = -6$ cm. Odległość obrazu od drugiej soczewki $y_2 = -3$ cm. Jest to obraz pozorny, który znajduje się między soczewkami w środku odległości między nimi.

593. Niech μ oznacza masę jednostki długości łańcuszka, a l długość jego odcinka ADB. Oznaczmy przyspieszenie, z jakim porusza się w pewnej chwili czasu wisząca część łańcuszka, przez a, natomiast jej prędkość w tej samej chwili przez v. Równanie ruchu odcinka BC łańcuszka ma postać: $\mu ha = \mu hg - F_B$, równanie odcinka ADB: $\mu la = F_B - F_A$, gdzie F_A i F_B są siłami naprężenia łańcuszka odpowiednio w punktach A i B. Stąd $F_A = \mu h(g - a) - \mu al$. Rozważmy bardzo krótki przedział czasu Δt. W tym czasie unosi się ze stołu odcinek łańcuszka o masie $\Delta m = \mu v\Delta t$. Zmiana pędu tego odcinka $\Delta mv = F_A\Delta t$, stąd $\mu v^2 = F_A$. Ustalona prędkość łańcuszka, gdy $a \to 0$, wynosi $v_{\max} = \sqrt{gh}$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
689 ($WT = 1{,}60$) i 690 ($WT = 2{,}45$)
z numeru 11/2014

Wojciech Maciak	Warszawa	43,85
Piotr Kumor	Olsztyn	43,67
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79
Paweł Najman	Kraków	31,92
Janusz Olszewski	Warszawa	31,86
Krzysztof Maziarz	Kraków	31,40

Zadania z matematyki nr 703, 704

Redaguje Marcin E. KUCZMA

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q, leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\to}$, $AD^{\to}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD.

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B, takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$A \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant ab + 2bc + cd \leqslant B \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Zadanie 704 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2015

Przypominamy treść zadań:

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q, spełniające równanie

$$\frac{P(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{Q(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

695. Oznaczmy przez $L(x)$ oraz $R(x)$ lewą i prawą stronę postulowanego równania

$$L(x) = (x^2 + x + 1)P(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)Q(x^2 + x + 1) = R(x).$$

Przyjmijmy, że P, Q nie są wielomianami zerowymi. Jasne, że muszą mieć jednakowy stopień $n \geqslant 1$ oraz równe współczynniki wiodące:

$$P(x) = ax^n + F(x), \quad Q(x) = ax^n + G(x) \quad (a \neq 0);$$
$$F,\ G \text{ – wielomiany stopni } \leqslant n - 1.$$

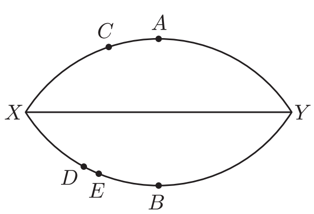
Tak więc

$$\begin{aligned} P(x^2 - x + 1) &= a(x^2 - x + 1)^n + F(x^2 - x + 1) = \\ &= ax^{2n} - nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n - 2); \\ Q(x^2 + x + 1) &= a(x^2 + x + 1)^n + G(x^2 + x + 1) = \\ &= ax^{2n} + nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n - 2); \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} L(x) &= ax^{2n+2} + (a - na)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n); \\ R(x) &= ax^{2n+2} + (na - a)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n). \end{aligned}$$

Stąd $a - na = 0$, czyli $n = 1$, czyli $P(x) = ax + b$, $Q(x) = ax + c$. Podstawiając w wyjściowym równaniu $x = 0$ oraz $x = 1$, otrzymujemy zależności $b = c$ oraz $3(a + b) = 3a + c$, skąd $b = c = 0$. Ostatecznie więc $P(x) = Q(x) = ax$; przyjęliśmy, że $a \neq 0$ – wszelako dla $a = 0$ dostajemy parę wielomianów zerowych, które też są rozwiązaniem. Oczywiście każda para postaci $P(x) = Q(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$ – dowolna stała) spełnia zadane równanie.



696. Wierzchołki oraz środek pięciokąta foremnego dają przykład szóstki punktów o podanej własności. Pokażemy, że siedmiu punktów nie da się rozmieścić w wymagany sposób.

Przypuśćmy, że jest to możliwe i niech A, B będą dwoma punktami z tej siódemki, których odległość jest maksymalna. Pozostałe punkty leżą w „soczewce”, ograniczonej łukami okręgów o środkach A, B i promieniu $|AB|$. Skoro każdy z tych pięciu punktów ma wraz z A, B tworzyć trójkąt równoramienny, mogą one leżeć jedynie na owych łukach oraz odcinku XY, łączącym ich wspólne końce. Na samym odcinku XY leżą co najwyżej dwa punkty (trójka współliniowa nie tworzy trójkąta). Pozostałe trzy punkty leżą na łukach XAY, XBY (bez końców X, Y).

Nie mogą wszystkie trzy leżeć na jednym z tych łuków, np. XAY, bowiem wraz z punktem A dałoby to czwórkę punktów, spośród których pewne trzy nie tworzyłyby trójkąta równoramiennego. Zatem na jednym łuku, np. XAY, leży jeden punkt C, zaś na łuku XBY dwa punkty D, E. Przyjmijmy, że C leży między A i X.

Każdy punkt łuku BY jest oddalony od C o odcinek dłuższy niż $|AB|$, więc D, E muszą być punktami łuku BX. Każdy z odcinków AC, CD ma wtedy długość mniejszą niż $|AD|$ ($= |AX| = |AB|$); warunek równoramienności trójkąta ACD wymusza równość $|AC| = |CD|$. Zastępując w tym rozumowaniu D przez E, dostajemy równość $|AC| = |CE|$. Wobec tego $|CD| = |CE|$. To już jest oczekiwana sprzeczność, bo jedynym punktem łuku XAY, położonym w równych odległościach od D i E, czyli na symetralnej odcinka DE, jest punkt A.

Stąd odpowiedź: największa liczba punktów, o jakich mowa w zadaniu, wynosi sześć.