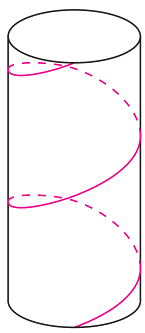
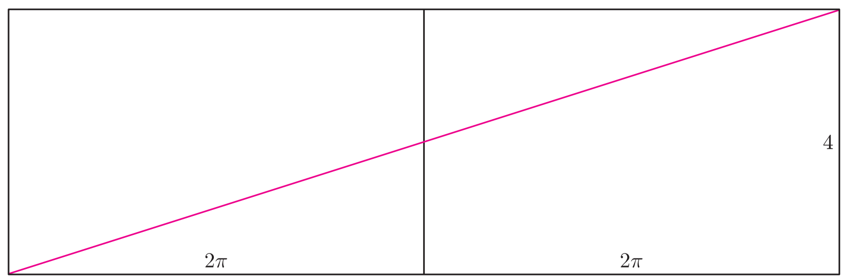
mała delta

Nawijamy, odwijamy

Jaką długość ma linia śrubowa owijająca dwukrotnie walec o promieniu 1 i wysokości 4, tak jak widać poniżej na obrazku z lewej?



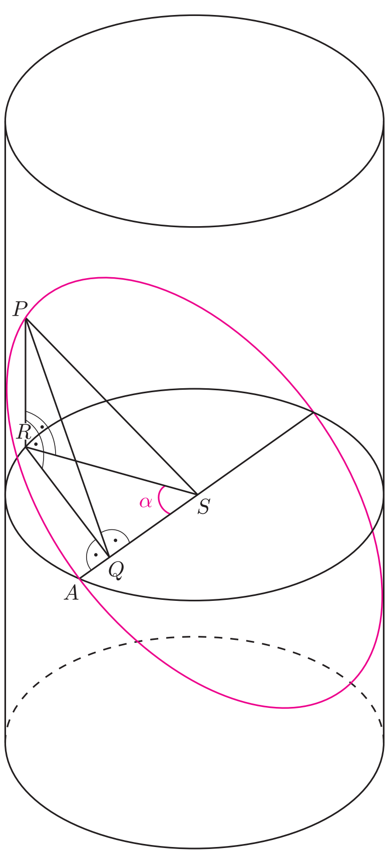
Oczywiście, $4\sqrt{\pi^2+1}$. Aby przekonać się, że rzeczywiście, wystarczy spojrzeć na obrazek z prawej – jeśli nawiniemy go na walec, to otrzymamy obrazek z lewej.



To elementarne, Watsonie!

Wobec tego zapytajmy teraz o to, jaką długość ma jeden okres sinusoidy (czyli od jakiegoś kąta γ do kąta $\gamma + 2\pi$), bo tego nie ma w poradnikach.

Oczywiście, nie podamy konkretnej liczby, tylko wskażemy inną linię tej samej długości – jest nią elipsa o osiach długości 2 i $2\sqrt{2}$. W tym celu wystarczy zauważyć, że jeśli walec o promieniu 1 (ten sam co poprzednio!) owiniemy papierem, a następnie przetniemy płaszczyzną tworzącą z jego osią kąt $\frac{\pi}{4}$, to obie otrzymane części papieru po rozwinięciu będą miały jeden z brzegów dokładnie sinusoidalny. To też nietrudno obliczyć. A przecięcie walca płaszczyzną to elipsa (czasami będąca okręgiem). Możemy nawet obliczyć, co otrzymamy przy dowolnym przecięciu owiniętego walca płaszczyzną. Przyjmijmy oznaczenia z rysunku na marginesie. Niech S będzie środkiem koła dzielącego na pół elipsę otrzymaną z przecięcia walca płaszczyzną tworzącą z osią walca kąt φ. Ograniczający to koło okrąg przetnie elipsę w dwóch punktach będących końcami jego średnicy – jeden z nich oznaczmy przez A.



Płaszczyzna elipsy i płaszczyzna koła tworzą kąt dwuścienny o rozwartości $\frac{\pi}{2} - \varphi$, czyli gdy poprowadzimy z dowolnego punktu prostej AS proste do niej prostopadłe w obu tych płaszczyznach, taki też będzie kąt między nimi.

Niech teraz P będzie dowolnym punktem elipsy. Zrzutujmy go prostopadle na okrąg, otrzymując punkt R, który z kolei zrzutujemy prostopadle na AS, otrzymując punkt Q.

Mamy zatem $AS = RS = 1$ i $\sphericalangle RQP = \frac{\pi}{2} - \varphi$; oznaczmy też $a := \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ oraz $\alpha := \sphericalangle ASR$ – jest to zarazem długość łuku (po rozwinięciu papieru – odcinka) AR.

Bez trudu zauważamy, że $PR = a \sin\alpha$, co oznacza, że po rozwinięciu przeciętego papieru otrzymamy wykres sinusa, którego wartości zostały pomnożone przez a. Oryginalną sinusoidę otrzymamy dla $a = 1$, czyli gdy $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Dla $a = 1$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$ odcinek PS (czyli dłuższa półoś elipsy) będzie miał długość $\sqrt{2}$. Krótszą osią elipsy będzie średnica okręgu.

Prawda, że nie bolało?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS