Kolorowe kropki

Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach występują różnokolorowe punkty płaszczyzny, a w ich rozwiązaniach przydatne bywają rozmaite rozumowania kombinatoryczne.

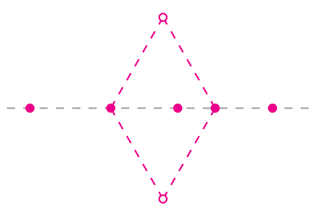
1. Maja i Gucio grają w grę. Malują na przemian punkty płaszczyzny wedle następujących reguł. Maja rozpoczyna; w swoim ruchu maluje dowolnie wybrany bezbarwny punkt na kolorowo. Gdy nadchodzi kolej Gucia, wybiera on 2015 bezbarwnych punktów i maluje je na czarno. Maja wygrywa, jeśli na płaszczyźnie pojawią się trzy kolorowe punkty tworzące trójkąt równoboczny. Czy Gucio może jej to uniemożliwić?

2. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z n kolorów ($n > 2$). Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

4. Każde pole szachownicy 12×12 pomalowano jednym z trzech kolorów. Wykaż, że istnieją cztery pola o tym samym kolorze, których środki są wierzchołkami prostokąta.

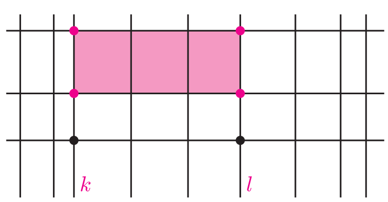
Rozwiązania



Rys. 1

R1. Nie, Maja może zastosować następującą strategię, która gwarantuje jej zwycięstwo. W pierwszych n swoich ruchach Maja maluje na kolorowo n punktów z jednej prostej. Każdą parę takich kolorowych punktów można na dwa sposoby uzupełnić do trójkąta równobocznego (rys. 1), par punktów spośród n jest $\frac{1}{2}n(n-1)$, więc łącznie po n ruchach na płaszczyźnie jest $n(n-1)$ takich punktów, że pomalowanie dowolnego z nich na kolorowo da Mai zwycięstwo.

Dla $n > 2016$ mamy $n(n-1) > 2015n$, zatem Gucio nie może w swoich początkowych n ruchach wszystkich opisanych powyżej punktów pomalować na czarno i Maja może wygrać w ruchu numer $n+1$. □



Rys. 2

R2. Narysujmy 3 poziome proste, 9 pionowych i rozważmy 27 punktów ich przecięć. Każdy punkt pomalowano jednym z dwóch kolorów, łącznie jest więc $2^3 = 8$ możliwych układów kolorów trójki wyróżnionych punktów z pojedynczej pionowej prostej. Ponieważ mamy 9 pionowych prostych, na pewnych dwóch z nich (nazwijmy je k i l) jest ten sam układ kolorów takiej trójki (rys. 2).

Wśród trzech wyróżnionych punktów na prostej k, pomalowanych dwoma kolorami, pewne dwa punkty mają ten sam kolor. Niech to będą dwa wierzchołki szukanego prostokąta, pozostałe dwa to odpowiadające im punkty tego samego koloru z prostej l (leżą one na tych samych poziomych prostych). □

W zadaniu 4 rozumowanie z zadania 3 nie działa, bowiem $2^{3+1} + 1 > 12$.

R3. Wystarczy uogólnić rozwiązanie poprzedniego zadania i rozważyć $n+1$ prostych poziomych oraz $2^{n+1}+1$ prostych pionowych. □

Dla dowolnych liczb $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zachodzi *nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną*:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}{n}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n}.$$

R4. Istnieje kolor, którym pomalowano przynajmniej $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$ pól. Rozważmy 48 pól tego właśnie koloru i niech w_i oznacza liczbę tych pól występujących w i-tym wierszu; oczywiście $\sum\limits_{i=1}^{12} w_i = 48$. W każdym wierszu dwa spośród rozważanych pól można wybrać na $\frac{1}{2}w_i(w_i-1)$ sposobów. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2} w_i(w_i - 1) = \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{i=1}^{12} w_i^2 - \sum_{i=1}^{12} w_i\Bigr) \geqslant \frac{12}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{12} w_i}{12}\right)^2 - \frac{48}{2} = 6\left(\frac{48}{12}\right)^2 - 24 = 72,$$

przy czym nierówność wynika z nierówności średnich (na marginesie). Tymczasem dwie z 12 kolumn można wybrać na $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 11 = 66$ sposobów – mniej niż 72. Oznacza to, że w pewnych dwóch wierszach można wybrać po dwa pola tego samego koloru i w tych samych kolumnach; ich środki tworzą szukany prostokąt. □

Zadanie 4 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z 2011 roku.