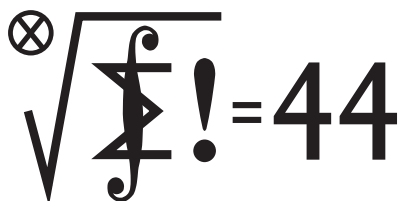


### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 687 ( $WT = 1,07$ ) i 688 ( $WT = 2,08$ ) z numeru 10/2014

Michał Miodek	Zawiercie	46,62
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	42,25
Piotr Kumor	Olsztyn	39,62
Wojciech Tobiś	Praszka	37,22
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79

Michał Miodek – już po raz drugi.

### Zadania z matematyki nr 701, 702

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**701.** Niech  $n$  będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od  $3n$ , w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od  $n$ .

**702.** Niech  $F_n(t) = t^n + (t + 1)^n$ . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $n \geq 1$ , dla których równanie  $F_{2n}(x) = F_n(y)$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y \geq 1$ .

Zadanie 702 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Opatrzył je komentarzem: dokładnie przed ćwierćwieczem to samo równanie było przedmiotem zadania ligowego 194 (*Delta* 5/1990 – treść i rozwiązanie); teza brzmiała: dla  $n \geq 2$  równanie może mieć w liczbach całkowitych  $x, y$  co najwyżej skończenie wiele rozwiązań (autor: Marcin Mazur); zaś w rocznym omówieniu (*Delta* 2/1992) pozostało otwarte pytanie, czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ( $|x|, |y| \leq 1$ ); obecna propozycja to mały krok w kierunku próby badania tego problemu.

### Rozwiązania zadań z numeru 1/2015

Przypominamy treść zadań:

**693.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne  $x$ , dla których każda z liczb  $x^2 - 44x$  oraz  $x^3 - 2015x$  jest wymierna.

**694.** Niech  $a(n)$  oznacza odległość liczby naturalnej  $n$  od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem:  $a(n) = \min\{|n - k^2| : k \in \mathbb{N}\}$ , i niech  $S(n) = a(1) + \dots + a(n)$  oraz  $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$ . Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu  $f(1), f(2), f(3), \dots$  dokładnie trzykrotnie.

**693.** Zgodnie z zadaniem, niech  $x \notin \mathbb{Q}$  będzie taką liczbą, że  $\alpha = x^2 - 44x \in \mathbb{Q}$  oraz  $\beta = x^3 - 2015x \in \mathbb{Q}$ . Tak więc

$$\alpha x = x^3 - 44x^2 = (\beta + 2015x) - 44(\alpha + 44x) = (\beta - 44\alpha) + 79x,$$

skąd  $(\alpha - 79)x \in \mathbb{Q}$ . Skoro  $x \notin \mathbb{Q}$ , musi być  $\alpha - 79 = 0$ .

Dostajemy równanie  $x^2 - 44x = 79$ , z rozwiązaniami  $x = 22 + \sqrt{563}$  oraz  $x = 22 - \sqrt{563}$ . Obie wartości spełniają wymagane warunki ( $\alpha = x^2 - 44x = 79$ ,  $\beta = x(x^2 - 2015) = 44 \cdot 79$ ).

**694.** Liczby, dla których najbliższym kwadratem jest  $k^2$ , mają postać

$$(1) \quad k^2 + r \quad (0 \leq r \leq k) \quad \text{lub} \quad k^2 - r \quad (1 \leq r \leq k - 1).$$

Suma wartości  $a(n)$  dla tych liczb wynosi  $2(1 + \dots + k) - k = k^2$ . Stąd

$$\begin{aligned} S(k^2) &= S(k^2 + k) - (1 + \dots + k) = \\ &= (1^2 + \dots + k^2) - (1 + \dots + k) = \frac{k(k^2 - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Dla liczb postaci (1) obliczamy:

$$\begin{aligned} S(k^2 + r) &= S(k^2) - (1 + 2 + \dots + r) = \frac{k(k^2 - 1)}{3} + \frac{r(r + 1)}{2}, \\ S(k^2 - r) &= S(k^2) - (0 + 1 + \dots + (r - 1)) = \\ &= \frac{k(k^2 - 1)}{3} - \frac{r(r - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Aby ujednoclić zapis, wprowadzamy parametr  $\epsilon = \pm 1$

i wyznaczamy  $f(n) = S(n)/n$  (dla  $n$  w formie (1)):

$$f(k^2 + \epsilon r) = \frac{\frac{1}{3}k(k^2 - 1) + \epsilon \cdot \frac{1}{2}r(r + \epsilon)}{k^2 + \epsilon r} \begin{pmatrix} \epsilon = +1 : r = 0, 1, \dots, k, \\ \epsilon = -1 : r = 1, \dots, k - 1 \end{pmatrix}.$$

Interesują nas wartości całkowite uzyskanego wyrażenia. Przekształcamy je do postaci

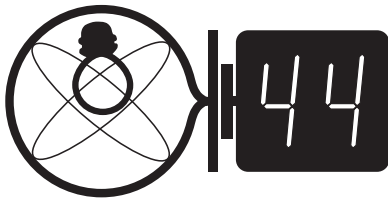
$$(2) \quad f(k^2 + \epsilon r) = \frac{k}{3} - h(k, \epsilon, r), \quad \text{gdzie} \quad h(k, \epsilon, r) = \frac{(\epsilon r + 1)(2k - 3r)}{6(k^2 + \epsilon r)}.$$

Dla  $r = 0$  oraz  $r = k$  ( $\epsilon = 1$ ) wychodzą wartości niecałkowite – można je zignorować, ograniczając zakres parametru  $r$  do  $1, \dots, k - 1$ . Wówczas

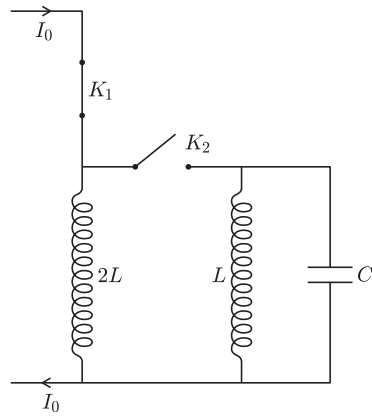
$$|h(k, \epsilon, r)| = \frac{|\epsilon r + 1| \cdot |2k - 3r|}{6|k^2 + \epsilon r|} \leq \frac{k(2k - 3)}{6(k^2 - k + 1)} < \frac{1}{3}.$$

Różnica (2) jest więc liczbą całkowitą (równą  $j$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $k = 3j$ , zaś  $h(k, \epsilon, r) = 0$ . Gdy  $k = 3j$ , ostatni warunek ( $h = 0$ ) jest spełniony dla trzech par  $(\epsilon, r)$ , mianowicie  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 2j)$ ,  $(+1, 2j)$ .

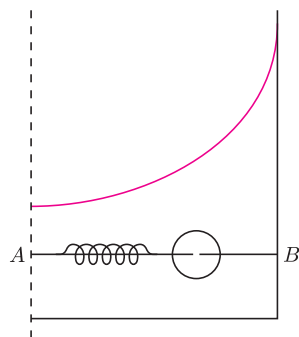
Wniosek: dowolna liczba całkowita  $j \geq 1$  jest wartością wyrażenia  $f(n)$  jedynie dla  $n = k^2 + \epsilon r$ , gdzie  $k = 3j$ , zaś  $(\epsilon, r)$  jest jedną z trzech powyższych par – czyli, po podstawieniu, dla  $n = 9j^2 - 1$ ,  $n = 9j^2 - 2j$ ,  $n = 9j^2 + 2j$ .



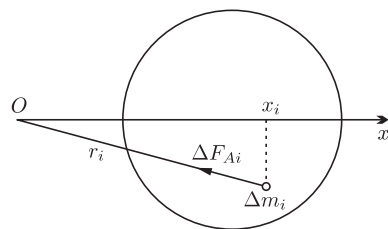
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2015



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 584 ( $WT = 2,08$ ), 585 ( $WT = 3,64$ ), 586 ( $WT = 3,64$ ) i 587 ( $WT = 1,96$ ) z numerów 10/2014 i 11/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,76
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Marian Łupieżowicz	Gliwice	25,29
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Michał Koźlik	Gliwice	20,31
Krzysztof Magiera	Łosiów	14,40

W opublikowanym w numerze 2/2015 zestawieniu uczestników Klubu 44 F chochlik drukarski usunął przy jednym z nazwisk wielokrotność uzyskania liczby 44 punktów. **Pana Michała Koźlika, Weterana Klubu 44 F i trzykrotnego zdobywcę 44 punktów, serdecznie przepraszamy.**

## Zadania z fizyki nr 598, 599

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**598.** Przez cewkę o współczynniku samoindukcji  $2L$  płynie prąd stały o natężeniu  $I_0$  z zewnętrznego źródła (rys. 1). Po zamknięciu klucza  $K_2$  do cewki podłączamy równolegle cewkę o współczynniku samoindukcji  $L$  oraz kondensator o pojemności  $C$ . Następnie otwieramy klucz  $K_1$ . Znaleźć maksymalne napięcie na kondensatorze i maksymalne natężenie prądu płynącego w cewce o współczynniku samoindukcji  $L$ . Elementy obwodu uważamy za idealne.

**599.** Koło, którego cała masa rozłożona jest równomiernie na obwodzie, może obracać się bez tarcia wokół swojej osi skierowanej poziomo. Wewnątrz koła, wzdłuż jego obwodu biegnie wiewiórka. Współczynnik tarcia między kołem a wiewiórką wynosi  $\mu$ . Stosunek masy koła do masy wiewiórki równy jest  $n$ . Jakie maksymalne, stałe przyspieszenie liniowe może nadać koło wiewiórka?

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2015

Przypominamy treść zadań:

**590.** W naczyniu w kształcie walca znajduje się ciecz o gęstości  $\rho$ . Walec obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół własnej osi. Wewnątrz walca, wzdłuż jego promienia, umocowany jest cienki pręt  $AB$ . Po przecięciu może ślizgać się bez tarcia koralik w kształcie kuli o masie  $m$  i promieniu  $r$  (rys. 2). Kula połączona jest z końcem  $A$  pręta za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$ . Długość nieodkształconej sprężyny wynosi  $l_0$ . Znaleźć odległość środka kuli od osi obrotu.

**591.** Na sferze o promieniu  $R$ , złożonej z dwóch półsfery, równomiernie rozłożony jest ładunek  $Q$ . Jaką siłą trzeba działać na każdą półsferę, aby nie rozsuwały się one pod wpływem oddziaływania ładunków?

**590.** Oznaczmy przez  $x$  szukaną odległość środka kuli od punktu  $A$ . W układzie inercyjnym w kierunku wzdłuż pręta działają na kulę: siła sprężystości  $F_S = k(x - r - l_0)$  oraz siła ze strony cieczy  $F_A$ , a ich wypadkowa jest siłą dośrodkową  $F_S + F_A = m\omega^2 x$ . Aby wyznaczyć siłę  $F_A$ , rozważmy obracającą się naczynie z samą cieczą, wyodrębnijmy w niej myślowo część znajdującą się w tym samym miejscu co kula i podzielmy ją na bardzo małe elementy o masach  $\Delta m_i$ . Siła ze strony pozostałej cieczy działająca na taki element w płaszczyźnie poziomej wynosi  $\Delta F_{Ai} = \Delta m_i \omega^2 r_i$ , gdzie  $r_i$  jest odległością elementu od osi obrotu (rys. 3). Niech pozioma oś  $OX$  prostokątnego układu współrzędnych ma początek na osi obrotu i przechodzi przez środek wydzielonej części cieczy, a oś  $OZ$  skierowana jest wzdłuż osi obrotu, prostopadle do płaszczyzny rysunku. Rzut siły  $\Delta F_{Ai}$  na oś  $OX$  wynosi  $F_{xi} = \Delta m_i \omega^2 x_i$ . Całkowita siła działająca w płaszczyźnie poziomej ze strony pozostałej cieczy na część wyróżnioną działa wzdłuż osi  $OX$ , co wynika z symetrii problemu, skierowana jest do osi obrotu i ma wartość  $F_A = \omega^2 \sum_i \Delta m_i x_i = \omega^2 x M$ , gdzie  $x$  jest odległością środka masy kuli od osi obrotu, a  $M = 4\pi r^3 \rho / 3$ . Siła  $F_A$  zależy tylko od położenia, kształtu i objętości wyróżnionej części cieczy. Taka sama siła działa na dowolne ciało umieszczone w tym samym miejscu wewnątrz cieczy. Szukana odległość wynosi

$$x = \frac{k(r + l_0)}{k - \omega^2(m - 4\pi r^3 \rho / 3)}$$

Rozwiązanie jest poprawne, gdy  $k > \omega^2(m - M)$ . W przeciwnym przypadku sprężyna jest zbyt słaba, aby utrzymać kulę wewnątrz cieczy, i kula w zależności od swojej gęstości przemieszcza się do jednego z końców pręta.

**591.** Szukana siła wynosi  $F = \pi R^2 p$ , gdzie  $p$  jest ciśnieniem wywieranym od wewnątrz na powierzchnię sfery, wywołanym oddziaływaniem ładunków. Aby wyznaczyć  $p$ , należy obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, zmniejszając promień sfery o małą wielkość  $\Delta R$ :

$$\Delta W = p|\Delta V| = \frac{4\pi p[R^3 - (R - \Delta R)^3]}{3} \approx 4\pi R^2 p \Delta R.$$

Praca ta powoduje zwiększenie energii elektrostatycznej sfery. Energia

elektrostatyczna sfery o promieniu  $R$  naładowanej ładunkiem  $Q$  wynosi  $W_E = \frac{Q^2}{2C}$ ,

gdzie  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  jest pojemnością sfery. Stąd  $\Delta W_E \approx \frac{Q^2 \Delta R}{8\pi\epsilon_0 R^2}$ .  $\Delta W = \Delta W_E$ , a więc

mamy  $p = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$ . Szukana siła jest równa  $F = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$ .