Chociaż metoda probabilistyczna słynie przede wszystkim ze swoich zastosowań w kombinatoryce, jej możliwości są dużo większe. Na stronie angielskiej Wikipedii zebrane zostały przykłady poważnych twierdzeń, które można udowodnić z użyciem rachunku prawdopodobieństwa. Lista jest doprawdy imponująca i zawiera przykłady z dziedziny analizy, algebry, teorii liczb czy nawet topologii.
Do najbardziej fascynujących ilustracji tej metody na pewno można zaliczyć twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami, które można udowodnić z użyciem tzw. prawa wielkich liczb. Bardzo intrygujący może być również dowód zasadniczego twierdzenia algebry z użyciem dwuwymiarowych ruchów Browna.

Metoda probabilistyczna nie jest jedynie kolejną techniką rozwiązywania zadań olimpijskich, a potężnym narzędziem stosowanym współcześnie w wielu działach matematyki. Bardzo duża część obecnie intensywnie badanej wielowymiarowej geometrii wypukłej opiera się na metodach losowych.

Czytelnik zainteresowany bardziej zaawansowanymi zastosowaniami tej metody może zajrzeć do doskonałej książki Nogi Alona i Joela H. Spencera: *The Probabilistic Method* oraz spróbować swoich sił w dwóch interesujących zadaniach pozostawionych do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Dwustu uczniów wzięło udział w konkursie matematycznym. Mieli oni do rozwiązania 6 zadań. Każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej 120 uczniów. Udowodnić, że istnieją tacy dwaj uczniowie, że każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej jednego z nich.

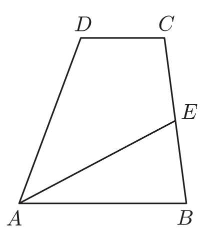
Podpowiedź. Rozważ dwóch losowych uczniów i oszacuj prawdopodobieństwo tego, że nie rozwiązali oni oboje zadania pierwszego. Postąp podobnie dla pozostałych zadań i wykorzystaj fakt, że prawdopodobieństwo sumy mnogościowej nie przekracza sumy prawdopodobieństw.

Zadanie 6. W kole o promieniu 16 znajduje się 650 punktów. Mamy do dyspozycji pierścień, który powstał przez usunięcie koła o promieniu 2 ze współśrodkowego z nim koła o promieniu 3. Wykazać, że ów pierścień można umieścić na płaszczyźnie w taki sposób, że przykrywa on przynajmniej 10 z danych punktów.

Podpowiedź. Rozważ losowy punkt w kole o promieniu 19, które jest współśrodkowe z danym. Udowodnij, że jeżeli środek pierścienia umieścimy w tym punkcie, to wartość oczekiwana liczby przykrytych punktów jest większa niż 9.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1453. W trapezie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe oraz $AB = 2 \cdot CD$. Punkt E jest środkiem boku BC. Udowodnić, że jeśli $AB = BC$, to w czworokąt $AECD$ można wpisać okrąg.
Rozwiązanie na str. 17

M 1454. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, przy czym $n \geqslant 3$. Dla wygody przyjmijmy dodatkowo, że $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1455. 12 rycerzy siedzi przy okrągłym stole. Każdy z nich ma dokładnie dwóch wrogów, jednego po swej prawej i jednego po swej lewej stronie. Na ile sposobów król może wybrać drużynę składającą się z 5 rycerzy, w której nie będzie wrogów?
Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 877. Jednakowe atomy o masach M i prędkościach u_0 tworzą równoległą wiązkę. Wiązka ta zderza się z przeciwbieżną, monochromatyczną wiązką fotonów (światła laserowego) o energiach równych energii wzbudzenia atomów ze stanu podstawowego do jednego ze stanów wzbudzonych o naturalnym czasie życia τ. Jak długą drogę przebędzie każdy z atomów od pierwszego zderzenia z fotonem do zatrzymania? Długość fali światła laserowego wynosi λ. Wiązka światła jest wystarczająco intensywna. Obliczenia wykonaj dla atomów magnezu.
Rozwiązanie na str. 14

F 878. Atom w stanie wzbudzonym, po pewnym czasie przechodzi do stanu o niższej energii, emitując przy tym foton. Średni czas życia τ w stanie wzbudzonym wyznacza tzw. naturalną szerokość linii widmowej, czyli dokładność, ΔE, z jaką możliwe jest wyznaczenie energii stanu wzbudzonego: $\tau \Delta E \geqslant h/(2\pi)$, gdzie h oznacza stałą Plancka. Obserwowane linie widmowe gazu w temperaturze T są dodatkowo poszerzone ze względu na termiczny ruch atomów emitujących fotony. Miarą szerokości linii widmowej jest połowa szerokości rejestrowanego rozkładu natężenia w połowie wysokości tego sygnału (tzw. FWHM – *full width at half maximum*). Oszacuj, do jakiej temperatury należy ochłodzić gaz atomów magnezu, aby termiczna szerokość linii widmowej (FWHM) odpowiadającej długości fali świetlnej była równa naturalnej szerokości tej linii, ΔE.
Rozwiązanie na str. 10

Wartości stałych występujących w obu zadaniach: długość fali światła laserowego $\lambda = 2852{,}1$ Å, czas życia stanu wzbudzonego $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ s, masa atomu magnezu $M = 2{,}264 \cdot 10^{10}$ eV/c^2, prędkość termiczna atomów magnezu w temperaturze 600 K to $u_0 = 800$ m/s, stała Plancka $h = 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV $\cdot$ s, stała Boltzmanna $k = 8{,}617 \cdot 10^{-5}$ eV/K, prędkość światła $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s.