Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

O LXVI Olimpiadzie Matematycznej

W LXVI Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 895 uczniów, więc aż o 272 osoby mniej niż w pierwszym stopniu poprzedniej Olimpiady. Niżej podpisanemu, który nie jest w tym osądzie osamotniony, wydaje się, że jest to związane z trudnością zadań, których rozwiązanie zaproponowaliśmy uczestnikom bieżącej OM.

Zwyczajowo przyjmujemy, że zadanie pierwsze powinno być łatwe. Na 895 uczestników nadesłało je 554. Tymczasem było ono trzecie w kolejności: rozwiązania drugiego przysłało 767 osób, a trzeciego – 646 osób.
Średnie za te zadania to 2,97, 2,81 i 3,43 punktu.

Zatrzymam się chwilę przy zadaniu pierwszym:

Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

Załóżmy więc, że liczby całkowite α, β i γ są niepodzielne przez liczbę pierwszą p, oraz że dla pewnej trójki liczb całkowitych nieujemnych k,m,n zachodzą równości $a=p^k\alpha$, $b=p^m\beta$ i $c=p^n\gamma$ (w dalszym ciągu myślę, że zadanie nie jest trudne). Aby wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem pewnej liczby całkowitej, wystarczy przecież wykazać, iż każdy czynnik pierwszy występuje w rozkładzie tej liczby z wykładnikiem podzielnym przez 3. Mamy $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}$. Mianownik tego ułamka jest podzielny przez liczbę p^{k+m+n} i niepodzielny przez $p^{k+m+n+1}$. Zastąpienie uporządkowanej trójki liczb (a,b,c) trójką (b,c,a) lub (c,a,b) powoduje, że liczba $\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}$ lub $\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}$ – więc ta z treści zadania – ma być całkowita (trójka b,a,c to jednak coś innego, bo na ogół $\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\neq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$). Można więc założyć, że $k\geqslant m,n$.
Mamy $a^2c+b^2a+c^2b=p^{2k+n}\alpha^2\gamma+p^{2m+k}\beta^2\alpha+p^{2n+m}\gamma^2\beta$.
Jeśli $k=m=n$, to $p^{k+m+n}=p^{3k}$, więc p występuje w rozkładzie iloczynu abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem $3k$.
Jeśli $k=m>n$, to $2k+n=k+m+n$, $2m+k=3k>k+m+n$ i $2n+m<n+k+m$, więc dwa z trzech składników licznika dzielą się przez p^{k+m+n}, a trzeci nie, co oznacza, że liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ nie jest całkowita, wbrew założeniu.
Jeśli $k=n>m$, to $2k+n>k+m+n$, $2m+k<m+n+k$ i $2n+m=k+m+n$, więc znów liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ nie jest całkowita.
Jeśli $k>m\geqslant n$, to $2k+n>k+m+n$, $2m+k\geqslant k+m+n$ i $2n+m<k+m+n$, więc znów liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ nie jest całkowita.
Jeśli $k>n>m$, to $2k+n>k+m+n$, $2m+k<k+m+n$ i $2n+m<k+m+n$, to teraz dwa składniki nie dzielą się przez p^{k+m+n}.
Ich suma może dzielić się przez p^{k+m+n} tylko wtedy, gdy $2m+k=2n+m\Leftrightarrow k+m+n=3n$, więc w tym wypadku liczba abc jest podzielna przez p^{3n}.

Wykazaliśmy, że jeśli liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ jest całkowita, to liczba pierwsza p wchodzi w rozkład liczby abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielnym przez 3.
To rozumowanie nie zawiera żadnych skrótów, ani pomysłów poza rozpatrywaniem podzielności, co jest oczywiście konieczne. Dowód został wymęczony. Zadanie, jako domowe powinno być rozwiązane przez większą liczbę startujących w OM. Coś jednak powoduje, że rozpatrzenie kilku przypadków (w braku lepszego pomysłu) staje się dla wielu uczniów trudne.

Jeszcze dwa słowa o równaniu kwadratowym w związku z rozwiązaniem jednego z zadań II stopnia 65 OM:

Jeśli $A(x)x^2+B(x)x+C(x)=0$ i $A(x)\neq 0$, to $B(x)^2\geqslant 4A(x)C(x)$.

Uczestniczka OM tak rozumowała nie dowodząc, że w jej sytuacji $A(x)\neq 0$, co było nieomal oczywiste. Najpierw chciano jej postawić 2 p., ale skończyło się na 5 p. Również większość nauczycieli, z którymi rozmawiałem na ten temat w pierwszej chwili mówiła, że to nie równanie kwadratowe (jeśli któryś ze współczynników jest zmienny). Ale

$$0=A(x)x^2+B(x)x+C(x)=A(x)\left(x-\frac{B(x)}{2A(x)}\right)^2-\frac{B(x)^2-4A(x)C(x)}{4A(x)},$$

więc tak rozumować wolno (założenia szkolne nie są spełnione, ale dowód twierdzenia działa!).

Michał KRYCH

Wszystkie zadania z zawodów pierwszego stopnia wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady www.om.edu.pl.

Więcej o tym zadaniu piszę w http://www.mimuw.edu.pl/ krych/odczyty/ocenianie-w-OM.pdf.

Dwie zagadki

I. Jak długo w laboratorium Edisona pracowano nad żarówką, zanim uzyskano taką, która mogła świecić przez kilkadziesiąt godzin (wcześniejsze od kilku do trzydziestu minut)?

II. Jak długo Johannes Kepler pracował nad trzecim prawem ruchu planet?

(odpowiedzi w numerze)