Matematyka jest jedna: metoda probabilistyczna

Tomasz KOBOS

doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

W pierwszej części cyklu (*Delta* 2/2015) mieliśmy okazję przyjrzeć się wybranym przykładom zaskakujących połączeń, z którymi możemy spotkać się w świecie matematyki. W drugiej części zapoznamy się z jednym z takich połączeń dużo dokładniej. Mowa tu o *metodzie probabilistycznej*, wiązanej często z nazwiskiem Paula Erdősa, który w trakcie swojej kariery naukowej korzystał z niej niezliczoną liczbę razy. Większość uczniów szkół średnich, nawet tych startujących w konkursach i olimpiadach, rachunek prawdopodobieństwa kojarzy głównie z niezbyt porywającymi zadaniami typu: „Rzucamy 3 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym...". Sytuacja zmienia się na studiach wyłącznie odrobinę, gdy dochodzą pojęcia zmiennej losowej i jej rozkładu czy wartości oczekiwanej. Repertuar poszerza się więc o zadania, w których trzeba znaleźć rozkład czy wartość oczekiwaną pewnej zmiennej losowej, ale dalej nie powoduje to u większości okrzyków zachwytu. Mówiąc krótko – rachunek prawdopodobieństwa przeciętnemu uczniowi czy studentowi nie kojarzy się z niczym fascynującym.

Jeżeli tak jest i w Twoim przypadku, Drogi Czytelniku, to ten artykuł jest właśnie dla Ciebie. Jego celem jest bowiem ukazanie zupełnie zaskakujących możliwości zastosowania rachunku prawdopodobieństwa w zagadnieniach, które nie tylko nie mają związku z żadnymi kostkami i monetami, a nawet nie ma w nich słowa o jakimkolwiek prawdopodobieństwie. Jedno z najbardziej typowych zastosowań metody probabilistycznej dotyczy sytuacji, w której chcemy udowodnić istnienie obiektu o pewnej żądanej własności. Często taki obiekt skonstruować jest bardzo trudno. Zamiast tego możemy udowodnić, że... prawdopodobieństwo jego istnienia jest dodatnie! Brzmi to być może na tyle nieprawdopodobnie (!), że lepiej będzie zobaczyć to na przykładzie.

Zadanie 1. Dowieść, że można pokolorować każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ na jeden z czterech kolorów w taki sposób, że żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze.

Rozwiązanie. Wykażemy, że jeżeli każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ pokolorujemy na jeden z czterech kolorów w sposób losowy, to prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym żaden rosnący 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazach z tego zbioru nie składa się z elementów o jednakowym kolorze, jest dodatnie. Zakładamy przy tym, że każdy element malujemy na dowolny z czterech kolorów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ i że losowania są niezależne.

Ustalmy chwilowo pojedynczy 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny. Jest 4^{10} wszystkich możliwych pokolorowań tego ciągu, z których dokładnie 4 składają się wyłącznie z elementów o jednakowym kolorze. Prawdopodobieństwo tego, że ustalony ciąg składa się z elementów o jednakowym kolorze, wynosi zatem $\frac{1}{4^9}$. Oszacujmy od góry liczbę N wszystkich rosnących 10-wyrazowych ciągów arytmetycznych o wyrazach w danym zbiorze. Każdy taki ciąg jest wyznaczony przez swój wyraz początkowy a oraz różnicę $r > 0$. Spełnione są przy tym nierówności $1 \leqslant a \leqslant 2006$ oraz $a + 9r \leqslant 2015$, czyli $r \leqslant \frac{2015-a}{9}$. Dla ustalonego a istnieje więc co najwyżej $\frac{2015-a}{9}$ ciągów, których pierwszym wyrazem jest a. Otrzymujemy zatem nierówność

$$N \leqslant \frac{2015-1}{9} + \frac{2015-2}{9} + \frac{2015-3}{9} + \ldots + \frac{2015-2006}{9} = \\ = \frac{2014 + 2013 + 2012 + \ldots + 10 + 9}{9} = \frac{2006 \cdot 2023}{2 \cdot 9} < \\ < \frac{2^{11} \cdot 2^{11}}{2 \cdot 2^3} = 4^9.$$

Ponumerujmy wszystkie N z rozważanych ciągów w sposób dowolny i dla $1 \leqslant i \leqslant N$ oznaczmy przez A_i zdarzenie, w którym i-ty ciąg zawiera elementy wyłącznie jednego koloru. Z podstawowej własności prawdopodobieństwa (tzw. *subaddytywności*) otrzymujemy wówczas

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_N) = \frac{N}{4^9} < 1.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym pewien ciąg pomalowany został z użyciem wyłącznie jednego koloru, jest mniejsze niż 1. Prawdopodobieństwo dopełnienia tego zdarzenia jest więc dodatnie, co oznacza, że w pewnym kolorowaniu żaden z rozważanych ciągów nie jest jednokolorowy. Kończy to dowód.

W tym przykładzie wyraźnie rzuca się w oczy bardzo istotna cecha metody probabilistycznej: za jej pomocą z reguły dowodzimy, że coś istnieje, ale nie wskazujemy tego. Ten schemat rozumowania w żadnym wypadku nie wyczerpuje jednak wszystkich jej możliwych zastosowań. Aby to zademonstrować, przyjrzyjmy się, jak korzystając z rachunku prawdopodobieństwa, można udowodnić równość dotyczącą wielokątów wypukłych, których wierzchołki znajdują się w ustalonym zbiorze punktów na płaszczyźnie.

Zadanie 2. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, wśród których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Niech $\mathcal{S}$ oznacza zbiór wszystkich wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tym zbiorze (jako wielokąty wypukłe traktujemy również zbiór pusty, pojedyncze punkty oraz odcinki). Dla dowolnego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ przez $a(P)$ i $b(P)$ oznaczamy odpowiednio liczbę punktów z danego zbioru, które leżą na obwodzie i na zewnątrz wielokąta P. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

Rozwiązanie. Dla ustalonego, skończonego zbioru punktów na płaszczyźnie wyrażenie

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$$

jest wielomianem zmiennej x. Aby wykazać, że jest to wielomian stale równy 1, wystarczy sprawdzić, że żądana równość zachodzi dla liczb x w przedziale $(0, 1)$.

Rozważmy losowe kolorowanie każdego z danych punktów na biało lub czarno. Załóżmy przy tym, że dowolny punkt malujemy na biało z prawdopodobieństwem x, na czarno z prawdopodobieństwem $1-x$ oraz że wszystkie losowania odbywają się niezależnie. Zauważmy, że wówczas dla ustalonego wielokąta $P \in \mathcal{S}$ liczba $x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia, w którym wszystkie wierzchołki P zostały pomalowane na biało, a punkty leżące na zewnątrz P na czarno. Co więcej, dla dwóch różnych wielokątów $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$ tego typu zdarzenia wykluczają się wzajemnie. Dla dowolnych dwóch różnych wielokątów wypukłych istnieje bowiem wierzchołek jednego z nich, który nie należy do drugiego. Gdyby opisane zdarzenia nie były rozłączne, to wierzchołek ten musiałby być pomalowany na dwa kolory, co jest, oczywiście, niemożliwe.

Suma
$$\sum_{P\in\mathcal{S}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$$
jest w tej sytuacji prawdopodobieństwem zdarzenia, w którym wierzchołki jednego z wielokątów P ze zbioru S zostały pomalowane na biało, zaś punkty leżące na zewnątrz P na czarno. Do rozwiązania zadania wystarczy więc stwierdzić, że jest to zdarzenie pewne – co oznacza, że w dowolnym pokolorowaniu taki wielokąt istnieje.

Szukanym wielokątem jest wielokąt P będący *otoczką wypukłą* białych punktów – czyli najmniejszym wielokątem wypukłym, który zawiera punkty białe (w przypadku gdy liczba punktów białych jest równa 0, 1 lub 2 ich otoczką wypukłą jest odpowiednio zbiór pusty, punkt i odcinek). Jego wierzchołki są koloru białego, a każdy inny punkt biały znajduje się w jego wnętrzu. Kończy to dowód.

W dalszych przykładach wykorzystamy pojęcia zmiennej losowej oraz jej wartości oczekiwanej. Precyzyjne definicje Czytelnik znajdzie bez problemu w Internecie lub w dowolnym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa, a więc jedynie poglądowo przypomnimy znaczenie tych pojęć. Na zmienną losową możemy patrzeć jako na funkcję liczbową związaną z losowaniem. Na przykład rzucamy trzy razy kostką. Zmienną losową jest wówczas, powiedzmy, suma wyrzuconych oczek, iloczyn wyrzuconych oczek, liczba kostek, na których wypadła szóstka i tak dalej. Wartością oczekiwaną $E[X]$ zmiennej losowej X jest jej wartość „średnia" – czyli jeżeli zmienna losowa X przyjmuje wartość i z prawdopodobieństwem x_i, to $E[X] = \sum_i ix_i$. Nietrudno udowodnić, że wartość oczekiwana jest liniowa, tzn. $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ dla dowolnych zmiennych losowych X, Y. Dla nas jest jeszcze istotna jej inna oczywista własność: zmienna losowa zawsze przyjmuje pewną wartość nie mniejszą (i pewną nie większą) niż jej wartość oczekiwana.

Zadanie 3. W 1600-osobowym stowarzyszeniu działa 16000 komisji, z których każda złożona jest z 80 osób. Udowodnić, że pewne dwie różne komisje mają przynajmniej czterech wspólnych członków.

Rozwiązanie. Rozważmy takie losowanie par różnych komisji, że dla dowolnych dwóch par prawdopodobieństwo ich wylosowania jest jednakowe. Wylosujmy w ten sposób pewną parę komisji i oznaczmy przez X liczbę wspólnych członków tej pary. Niech $X_i \in \{0,1\}$ będzie *funkcją charakterystyczną* i-tej osoby, czyli $X_i = 1$, jeżeli i-ta osoba należy do obu wylosowanych komisji oraz $X_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Funkcje X oraz X_i są zmiennymi losowymi. Ponieważ $X = \sum_{i=1}^{1600} X_i$, więc zachodzi równość $E[X] = \sum_{i=1}^{1600} E[X_i]$. Jednocześnie wprost z definicji wartości oczekiwanej wynika, że liczba $E[X_i]$ jest w rzeczywistości prawdopodobieństwem tego, że i-ta osoba należy do obu z wylosowanych komisji. Jeśli przez x_i oznaczymy więc liczbę komisji, do których należy i-ta osoba ze stowarzyszenia, to zachodzi równość
$$E[X_i] = \frac{\binom{x_i}{2}}{\binom{16000}{2}}.$$
Skoro każda komisja zawiera 80 członków, to mamy ponadto $\sum_{i=1}^{1600} x_i = 16000 \cdot 80$. Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną a kwadratową, otrzymujemy
$$E[X] = \sum_{i=1}^{1600} E[X_i] = \sum_{i=1}^{1600} \frac{\binom{x_i}{2}}{\binom{16000}{2}} = \sum_{i=1}^{1600} \frac{x_i^2 - x_i}{16000 \cdot 15999} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{1600} x_i\right)^2}{16000 \cdot 15999 \cdot 1600} - \frac{\sum_{i=1}^{1600} x_i}{16000 \cdot 15999} =$$
$$= \frac{80^2 \cdot 16000}{15999 \cdot 1600} - \frac{80}{15999} = \frac{64000 - 80}{15999} = \frac{63920}{15999} > 3.$$
Zmienna losowa X przyjmuje wyłącznie wartości całkowite, a więc skoro jej wartość oczekiwana jest większa niż 3, to co najmniej raz przyjmuje ona wartość nie mniejszą niż 4. Istnieje więc para różnych komisji, która ma przynajmniej czterech wspólnych członków.

Na zakończenie rozważymy przykład o bardziej teorioliczbowym charakterze.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita dodatnia $n \geqslant 1$. Niech A będzie ustalonym zbiorem n reszt z dzielenia przez n^2. Udowodnić, że istnieje zbiór B złożony z n reszt z dzielenia przez n^2, który spełnia następujący warunek: co najmniej połowa reszt z dzielenia przez n^2 przystaje do liczby postaci $a+b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$.

Rozwiązanie. Dokonajmy n niezależnych losowań ze zbioru reszt z dzielenia przez n^2, zakładając przy tym, że prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej z reszt jest równe $\frac{1}{n^2}$. Z uzyskanych reszt tworzymy zbiór B. Ponieważ losowania są niezależne, może on składać się z mniej niż n reszt, gdyż pewna reszta mogła zostać wylosowana więcej niż jeden raz. Jeżeli spełniony jest jednak warunek, w którym co najmniej połowa reszt może być zapisana w postaci $a+b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$, to możemy dopełnić zbiór B do zbioru n-elementowego w dowolny sposób i warunek ten pozostanie spełniony.

Niech X będzie liczbą reszt, które przystają do liczby postaci $a+b$ dla $a \in A$ oraz $b \in B$. Wystarczy udowodnić, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi co najmniej $\frac{n^2}{2}$. Ustalmy dowolną resztę $0 \leqslant i \leqslant n^2 - 1$. Ponieważ zbiór A składa się z n elementów, więc istnieje dokładnie n takich reszt b, że $i \equiv a + b \pmod{n^2}$ dla pewnego $a \in A$. Prawdopodobieństwo tego, że ustalona reszta i nie może być zapisana w żądanej postaci, wynosi zatem $\left(1 - \frac{n}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Co za tym idzie, prawdopodobieństwo tego, że może być ona tak zapisana, wynosi $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Korzystając z definicji wartości oczekiwanej oraz nierówności $e^x \geqslant 1 + x$ dla $x \in \mathbb{R}$, dostajemy
$$E[X] = n^2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \geqslant n^2(1 - e^{-1}) > n^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n^2}{2}.$$
To kończy dowód.

Chociaż metoda probabilistyczna słynie przede wszystkim ze swoich zastosowań w kombinatoryce, jej możliwości są dużo większe. Na stronie angielskiej Wikipedii zebrane zostały przykłady poważnych twierdzeń, które można udowodnić z użyciem rachunku prawdopodobieństwa. Lista jest doprawdy imponująca i zawiera przykłady z dziedziny analizy, algebry, teorii liczb czy nawet topologii.
Do najbardziej fascynujących ilustracji tej metody na pewno można zaliczyć twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami, które można udowodnić z użyciem tzw. prawa wielkich liczb. Bardzo intrygujący może być również dowód zasadniczego twierdzenia algebry z użyciem dwuwymiarowych ruchów Browna.

Metoda probabilistyczna nie jest jedynie kolejną techniką rozwiązywania zadań olimpijskich, a potężnym narzędziem stosowanym współcześnie w wielu działach matematyki. Bardzo duża część obecnie intensywnie badanej wielowymiarowej geometrii wypukłej opiera się na metodach losowych.

Czytelnik zainteresowany bardziej zaawansowanymi zastosowaniami tej metody może zajrzeć do doskonałej książki Nogi Alona i Joela H. Spencera: *The Probabilistic Method* oraz spróbować swoich sił w dwóch interesujących zadaniach pozostawionych do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Dwustu uczniów wzięło udział w konkursie matematycznym. Mieli oni do rozwiązania 6 zadań. Każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej 120 uczniów. Udowodnić, że istnieją tacy dwaj uczniowie, że każde z zadań zostało rozwiązane przez przynajmniej jednego z nich.

Podpowiedź. Rozważ dwóch losowych uczniów i oszacuj prawdopodobieństwo tego, że nie rozwiązali oni oboje zadania pierwszego. Postąp podobnie dla pozostałych zadań i wykorzystaj fakt, że prawdopodobieństwo sumy mnogościowej nie przekracza sumy prawdopodobieństw.

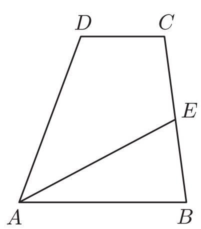
Zadanie 6. W kole o promieniu 16 znajduje się 650 punktów. Mamy do dyspozycji pierścień, który powstał przez usunięcie koła o promieniu 2 ze współśrodkowego z nim koła o promieniu 3. Wykazać, że ów pierścień można umieścić na płaszczyźnie w taki sposób, że przykrywa on przynajmniej 10 z danych punktów.

Podpowiedź. Rozważ losowy punkt w kole o promieniu 19, które jest współśrodkowe z danym. Udowodnij, że jeżeli środek pierścienia umieścimy w tym punkcie, to wartość oczekiwana liczby przykrytych punktów jest większa niż 9.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1453. W trapezie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe oraz $AB = 2 \cdot CD$. Punkt E jest środkiem boku BC. Udowodnić, że jeśli $AB = BC$, to w czworokąt $AECD$ można wpisać okrąg.
Rozwiązanie na str. 17



M 1454. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, przy czym $n \geqslant 3$. Dla wygody przyjmijmy dodatkowo, że $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1455. 12 rycerzy siedzi przy okrągłym stole. Każdy z nich ma dokładnie dwóch wrogów, jednego po swej prawej i jednego po swej lewej stronie. Na ile sposobów król może wybrać drużynę składającą się z 5 rycerzy, w której nie będzie wrogów?
Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 877. Jednakowe atomy o masach M i prędkościach u_0 tworzą równoległą wiązkę. Wiązka ta zderza się z przeciwbieżną, monochromatyczną wiązką fotonów (światła laserowego) o energiach równych energii wzbudzenia atomów ze stanu podstawowego do jednego ze stanów wzbudzonych o naturalnym czasie życia τ. Jak długą drogę przebędzie każdy z atomów od pierwszego zderzenia z fotonem do zatrzymania? Długość fali światła laserowego wynosi λ. Wiązka światła jest wystarczająco intensywna. Obliczenia wykonaj dla atomów magnezu.
Rozwiązanie na str. 14

F 878. Atom w stanie wzbudzonym, po pewnym czasie przechodzi do stanu o niższej energii, emitując przy tym foton. Średni czas życia τ w stanie wzbudzonym wyznacza tzw. naturalną szerokość linii widmowej, czyli dokładność, ΔE, z jaką możliwe jest wyznaczenie energii stanu wzbudzonego: $\tau \Delta E \geqslant h/(2\pi)$, gdzie h oznacza stałą Plancka. Obserwowane linie widmowe gazu w temperaturze T są dodatkowo poszerzone ze względu na termiczny ruch atomów emitujących fotony. Miarą szerokości linii widmowej jest połowa szerokości rejestrowanego rozkładu natężenia w połowie wysokości tego sygnału (tzw. FWHM – *full width at half maximum*). Oszacuj, do jakiej temperatury należy ochłodzić gaz atomów magnezu, aby termiczna szerokość linii widmowej (FWHM) odpowiadającej długości fali świetlnej była równa naturalnej szerokości tej linii, ΔE.
Rozwiązanie na str. 10

Wartości stałych występujących w obu zadaniach: długość fali światła laserowego $\lambda = 2852{,}1$ Å, czas życia stanu wzbudzonego $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ s, masa atomu magnezu $M = 2{,}264 \cdot 10^{10}$ eV/c^2, prędkość termiczna atomów magnezu w temperaturze 600 K to $u_0 = 800$ m/s, stała Plancka $h = 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV $\cdot$ s, stała Boltzmanna $k = 8{,}617 \cdot 10^{-5}$ eV/K, prędkość światła $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s.