Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

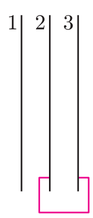
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

Zadania z fizyki nr 596, 597

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

596. Od prostoliniowego fragmentu brzegu odpłynęły jednocześnie dwa statki A i B, które w chwili początkowej znajdowały się w odległości a. Statek A poruszał się po prostej prostopadłej do brzegu. Statek B przez cały czas trzymał kurs na statek A. Wartości prędkości obu statków były stałe i jednakowe. Jaka była odległość między statkami, gdy można było już uznać, że statek B zaczął płynąć za statkiem A?

597. Trzy płytki metalowe o powierzchniach S ustawiono równolegle. Pierwsza naładowana jest ładunkiem Q, druga i trzecia połączone są drutem przewodzącym (rys. 1). Rozmiary liniowe płytek są dużo większe od odległości między nimi. Jaka siła działa na środkową płytkę?



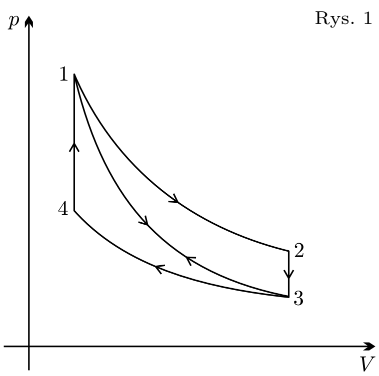
Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

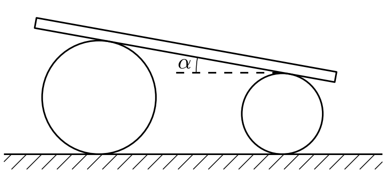
588. Procesy 1–2 oraz 3–4 na wykresie p-V (rys. 2) są przemianami izotermicznymi. Proces 1–3 jest przemianą adiabatyczną. Procesy 2–3 oraz 4–1 to izochory. Sprawność cyklu 1–2–3–1 wynosi η_1, sprawność cyklu 1–3–4–1 wynosi η_2. Oblicz sprawność cyklu 1–2–3–4–1.

589. Na poziomej podłodze leżą dwa równoległe walce o różnych promieniach. Na walcach położono ciężką deskę, która tworzy z poziomem kąt α (rys. 3). Znaleźć przyspieszenie deski. Nie ma poślizgu między walcami i deską oraz między walcami i podłogą. Masy walców są zaniedbywalnie małe w porównaniu z masą deski.



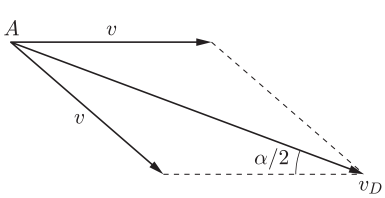
Rys. 2

588. Oznaczmy przez Q_1 ciepło pobrane na izotermie 1–2, a przez Q_3 wartość bezwzględną ciepła oddanego na izotermie 3–4. Na wykresie p-V są one równe polu pod odpowiednią izotermą, bo w przemianie izotermicznej energia wewnętrzna nie zmienia się. Zatem praca uzyskana w cyklu 1–2–3–4–1 wynosi $W = Q_1 - Q_3$. Sprawność tego cyklu $\eta = \dfrac{W}{Q_1 + Q_2}$, gdzie Q_2 jest ciepłem pobranym na izochorze 4–1. Jest ono równe wartości bezwzględnej ciepła oddanego na izochorze 2–3, bo obie izochory łączą na wykresie p-V punkty o tych samych temperaturach. Sprawność cyklu 1–2–3–1 dana jest wzorem $\eta_1 = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$, stąd $Q_1 = \dfrac{Q_2}{1-\eta_1}$. Sprawność cyklu 1–3–4–1 to $\eta_2 = 1 - \dfrac{Q_3}{Q_2}$, stąd $Q_3 = Q_2(1-\eta_2)$. Ostatecznie szukana sprawność cyklu wynosi $\eta = \dfrac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{2 - \eta_1}$.



Rys. 3

589. Ponieważ nie ma poślizgu, prędkość deski względem ziemi v_D jest taka sama jak punktów na powierzchni walców, które w danej chwili stykają się z deską. Niech A będzie jednym z takich punktów. Jego prędkość względem ziemi jest złożeniem poziomej prędkości ruchu postępowego walca v i prędkości ruchu obrotowego względem środka walca o tej samej wartości (rys. 4). Wektor prędkości deski względem ziemi tworzy z poziomem kąt $\dfrac{\alpha}{2}$. Tarcie jest statyczne, możemy więc korzystać z zasady zachowania energii mechanicznej, zaniedbując zmianę energii kinetycznej walców: $\dfrac{Mv_D^2}{2} = Mgh = Mgs\sin\dfrac{\alpha}{2}$, gdzie M jest masą deski a h jej przesunięciem w kierunku pionowym. Droga s przebyta przez deskę od chwili rozpoczęcia ruchu dana jest wzorem $s = \dfrac{v_D^2}{2g\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Deska porusza się więc ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = g\sin\dfrac{\alpha}{2}$.



Rys. 4

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 685 ($WT = 1{,}85$) i 686 ($WT = 1{,}53$) z numeru 9/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	46,97
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,78
Michał Miodek	Zawiercie	43,68
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	41,18
Piotr Kumor	Olsztyn	36,47
Wojciech Tobiś	Praszka	36,15

I znów dwa nazwiska, jakże dobrze znane. Linię 44 przekraczają jednocześnie dwaj wytrawni wielokrotni Weterani: Jerzy Cisło (po raz jedenasty) i Tomasz Wietecha (po raz dziesiąty).

Zadania z matematyki nr 699, 700

Redaguje Marcin E. KUCZMA

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a, zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b, przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a.

700. Czy dla każdej funkcji $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geqslant g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? ($\mathbb{N}$ to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

Zadanie 700 zaproponował pan Jędrzej Garnek z Poznania.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

691. Mamy skończoną liczbę koszyków, w każdym z nich skończoną liczbę kamieni; znamy wagę każdego kamienia. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu przekładamy jeden kamień z jakiegoś koszyka K do innego koszyka K'; musi być przy tym spełniony warunek, że łączna waga kamieni w koszyku K' po wykonaniu ruchu jest mniejsza niż łączna waga kamieni w koszyku K przed wykonaniem ruchu. Czy ciąg ruchów może być nieskończony?

692. Dany jest trójkąt ABC. Rozważamy trzy elipsy: każda z nich ma ogniska w dwóch wierzchołkach tego trójkąta i przechodzi przez trzeci wierzchołek. Pokazać, że te trzy elipsy mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

691. Ponumerujmy koszyki: $K_1, \ldots, K_n$. Niech W_i będzie wagą koszyka K_i (tj. łączną wagą kamieni w tym koszyku) w ustalonej chwili. W kolejnym ruchu przekładamy kamień z koszyka K_j do koszyka K_l. Niech x będzie wagą tego kamienia; postulowany warunek:

$$W_l + x < W_j.$$

Suma kwadratów wag koszyków po wykonaniu ruchu wynosi

$$\sum_{i \neq j,l} W_i^2 + (W_j - x)^2 + (W_l + x)^2 = \\ = \sum_i W_i^2 + 2x(x + W_l - W_j) < \sum_i W_i^2.$$

Suma kwadratów wag jest więc (ścisłym) półniezmiennikiem: maleje w każdym kroku procedury. Jest tylko skończenie wiele możliwych rozlokowań kamieni w koszykach, więc wartości tego półniezmiennika przebiegają zbiór skończony. Proces musi się zakończyć.

692. Załóżmy, że trzy elipsy, o których mowa, mają punkt wspólny X, leżący w odległościach x, y, z odpowiednio od wierzchołków A, B, C zadanego trójkąta, o bokach długości $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Elipsa o ogniskach B, C przechodzi przez punkty A, X, więc $y + z = b + c$. Analogicznie $z + x = c + a$, $x + y = a + b$. Ten układ równań z niewiadomymi x, y, z ma jedyne rozwiązanie $x = a$, $y = b$, $z = c$. Odległości punktu X od B oraz C wynoszą więc, odpowiednio, b oraz c – czyli przeciwnie niż odległości punktu A od B oraz C. To wyznacza dwa możliwe położenia punktu X – może to być punkt symetryczny do A względem symetralnej odcinka BC lub punkt symetryczny do A względem środka odcinka BC.

W pierwszym przypadku punkty X, A, B, C są wierzchołkami trapezu równoramiennego ($BC \parallel AX$); w drugim – tworzą równoległobok $ABXC$. Dodatkowa informacja, że $a = x$, czyli $|BC| = |AX|$, daje w obu przypadkach wniosek, że ów czworokąt jest prostokątem. A zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Na odwrót, gdy trójkąt jest prostokątny, wówczas wystarczy go uzupełnić do prostokąta czwartym wierzchołkiem; widać, że ów wierzchołek będzie wspólnym punktem trzech omawianych elips.

Z żalem żegnamy

ANDRZEJA IDZIKA

Nadweterana Klubu 44F i dwukrotnego Weterana Klubu 44M