Desargues i nożyce

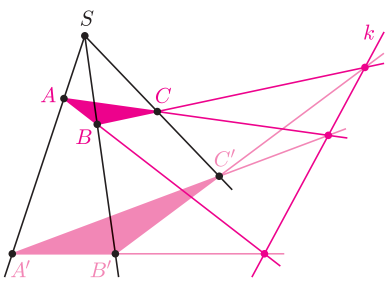
Joanna JASZUŃSKA

W geometrii rzutowej przyjmujemy, że każde dwie proste równoległe przecinają się w pewnym ustalonym punkcie w nieskończoności, odpowiadającym ich kierunkowi, oraz że wszystkie takie punkty w nieskończoności tworzą prostą („horyzont"). Poniżej przedstawiamy przykłady pojęć i twierdzeń rzutowych oraz ich zastosowań; dopuszczamy w nich takie właśnie punkty przecięcia „na horyzoncie".

$k \cap l$ – punkt przecięcia prostych k i l.

Dane są trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ (rys. 1). Jeśli proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie S, to punkt ten nazywamy *środkiem perspektywicznym* danych trójkątów. Jeśli punkty $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ leżą na jednej prostej k, to nazywamy ją *osią perspektywiczną* danych trójkątów.

Rysunki 1 i 2 przedstawiają po jednej z wielu możliwych konfiguracji.



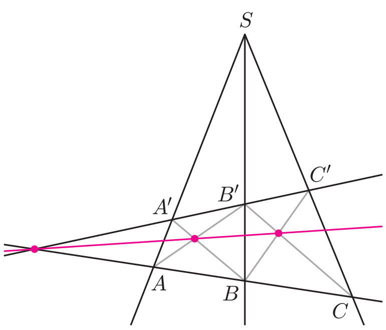
Rys. 1

Twierdzenie Desarguesa. *Dwa trójkąty mają środek perspektywiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną.*

Każda taka płaska konfiguracja jest rzutem pewnej konfiguracji trójwymiarowej, można więc dowodzić tego twierdzenia przestrzennie (dowód w jedną stronę opisano w *deltoidzie* 5/2010).

Twierdzenie o nożycach. *Pęk prostych o wierzchołku S przecięto dwiema prostymi, po czym narysowano przekątne uzyskanych w ten sposób czworokątów, jak na rysunku 2. Wówczas kolorowe punkty są współliniowe.*

Dowód. Trójkąty $AB'C$ i $A'BC'$ mają środek perspektywiczny S, więc z twierdzenia Desarguesa mają też oś perspektywiczną, co kończy dowód dla pęku trzech prostych. Gdy jest ich więcej, wystarczy rozważać kolejne trójki spośród nich. □



Rys. 2

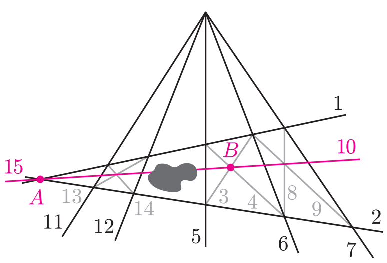
1. Na kartce znajdują się punkty A, B oraz plama oleju pomiędzy nimi. Poprowadź prostą przez punkty A i B, używając tylko linijki i nie brudząc jej w oleju.

2. Na kartce narysowano dwie proste, przecinające się w pewnym punkcie S poza kartką, oraz punkt A pomiędzy nimi. Korzystając wyłącznie z linijki, narysuj tę część prostej AS, która mieści się na kartce.

3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA, SB, SC, SD, SE odpowiednio w punktach A', B', C', D', E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnij, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

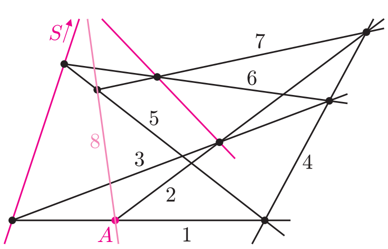
Rozwiązania

R1. Rysunek 3 ilustruje konstrukcję wykorzystującą twierdzenie o nożycach. □



Rys. 3. Kolejność rysowania prostych oznaczono liczbami.

R2. Rysunek 4 przedstawia konstrukcję korzystającą z twierdzenia Desarguesa. □



Rys. 4. Kolejność rysowania prostych oznaczono liczbami.

R3. Spójrzmy na dany ostrosłup z boku, w kierunku równoległym do płaszczyzn $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ (rysunek podobny do rys. 2). Na mocy twierdzenia o nożycach, rozważane punkty przecięcia przekątnych widzimy wówczas jako współliniowe, więc w rzeczywistości leżą one na jednej płaszczyźnie. □

Zadania domowe

4. Rozwiąż zadanie 2, korzystając z twierdzenia o nożycach, tak jak w zadaniu 1.

5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że punkty $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap DF$ leżą na jednej prostej.

Wskazówka. Wykaż, że proste AD, BE, CF są współpękowe i wykorzystaj twierdzenie Desarguesa. Inne rozwiązanie opisano w *deltoidzie* 9/2014.

6. Dany jest trójkąt ABC. Punkty E i G leżą na boku BC, punkty F i H – na boku AC. Punkty $AG \cap BH$, $AE \cap BF$ oraz punkt C leżą na jednej prostej. Wykaż, że jeśli proste EF i GH nie są równoległe, to przecinają się na prostej AB.

Wskazówka. Rozważ trójkąty AEG oraz BFH.

Zadanie 3 pochodzi z XLIX Olimpiady Matematycznej.