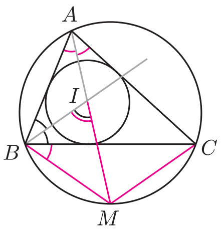
$MI = MB = MC$

Joanna JASZUŃSKA

Istnieje zaskakujący związek między okręgiem wpisanym w trójkąt i okręgiem na nim opisanym:

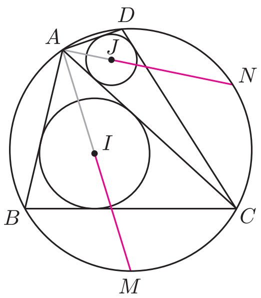


Rys. 1

Twierdzenie (∗). *Dany jest trójkąt ABC* (rys. 1). *Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego, do którego nie należy punkt A. Wówczas punkt I należący do odcinka AM jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $MI = MB = MC$.*

Dowód. Skoro M jest środkiem łuku BC, to $MB = MC$ oraz AI jest dwusieczną kąta BAC. Wystarczy zatem dowieść, że BI jest dwusieczną kąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $MI = MB$, czyli gdy $\sphericalangle MIB = \sphericalangle MBI$.

Kąt MIB jest zewnętrzny w trójkącie ABI, więc $\sphericalangle MIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA$. Z kolei $\sphericalangle MBI = \sphericalangle MBC + \sphericalangle IBC$. Ponieważ $\sphericalangle IAB = \sphericalangle IAC = \sphericalangle MBC$, więc równość $\sphericalangle MIB = \sphericalangle MBI$ równoważna jest równości $\sphericalangle IBA = \sphericalangle IBC$, co kończy dowód. □



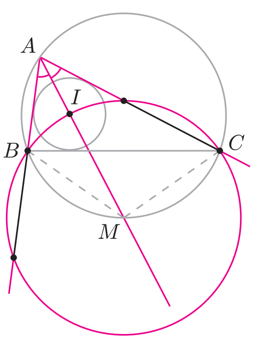
Rys. 2

1. Skonstruuj trójkąt ABC, mając dany jego wierzchołek A, punkt O – środek okręgu opisanego i punkt I – środek okręgu wpisanego.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg Γ. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, prosta AI przecina okrąg Γ w punkcie $M \neq A$. Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC, prosta AJ przecina okrąg Γ w punkcie $N \neq A$. Wykaż, że jeżeli $MI = NJ$, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie BCI wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta. Wykaż, że środek odcinka IJ należy do okręgu opisanego na trójkącie ABC.



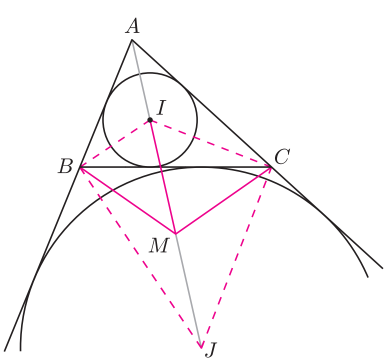
Rys. 3. Kolorowa część rysunku jest symetryczna względem prostej AI.

Rozwiązania

R1. Konstruujemy kolejno: okrąg o środku O i promieniu OA, M – jego punkt przecięcia z prostą AI oraz okrąg o środku M i promieniu MI. Na mocy (∗), punkty przecięcia powyższych dwóch okręgów to wierzchołki B i C trójkąta. □

R2. Na mocy (∗) i założenia, zachodzi równość $MC = MI = NJ = NC$ (rys. 2). Stąd $\sphericalangle MAC = \sphericalangle NAC$ jako kąty wpisane w okrąg Γ oparte na równych łukach. Wobec tego $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle MAC = 2\sphericalangle NAC = \sphericalangle DAC$. □

R3. Środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCI jest punkt M z twierdzenia (∗); leży on na dwusiecznej kąta BAC. Z symetrii problemu (rys. 3) okrąg ten wyznacza więc na ramionach kąta równe cięciwy. □



Rys. 4

R4. Niech J leży w kącie BAC (rys. 4). Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe, więc $BI \perp BJ$ oraz $CI \perp CJ$. Wobec tego na czworokącie $BJCI$ można opisać okrąg, którego środkiem jest środek M odcinka IJ. Okrąg ten jest opisany na trójkącie BCI, czyli M to punkt z twierdzenia (∗), leży więc na okręgu opisanym na trójkącie ABC. □

Zadania domowe

5. W dany okrąg wpisz trójkąt ABC, mając dane jego wierzchołki A, B oraz promień okręgu wpisanego.

6. Okrąg O jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie S, a do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Wykaż, że jeśli $AC = BC$, to środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest środkiem odcinka DE.

Wskazówka. Wykaż, że $\triangle SAD \equiv \triangle SID$, gdzie I to środek odcinka DE.

Zadanie 6 można też rozwiązać, posługując się twierdzeniem Pascala (*deltoid* 9/2014).