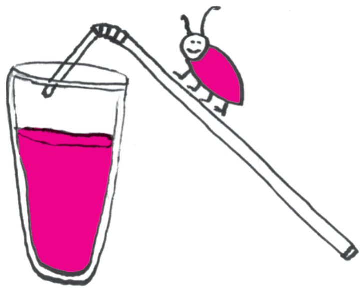
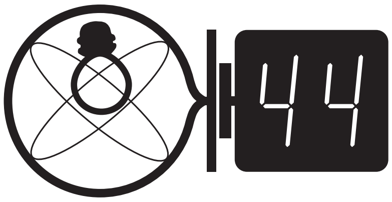
Klub 44





Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2015

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

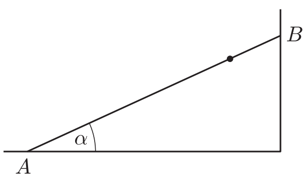
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 594, 595

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

594. Żuk pełznie po sztywnej słomce, opartej o gładką podłogę i gładką pionową ściankę (rys. 1). Słomka jest jednorodna, tworzy z poziomem kąt α, jej długość wynosi l, masa słomki jest zaniedbywalna w porównaniu z masą żuka m. Prędkość początkowa żuka w punkcie B wynosi v_0. Jak musi poruszać się żuk, aby słomka pozostawała nieruchoma? Po jakim czasie dopełznie on do punktu A?



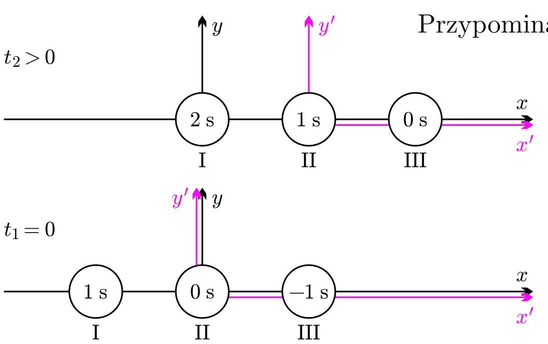
Rys. 1

595. W pionowo ustawionym cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze T_0. Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia. Gaz ściśnięto za pomocą tłoka, wykonując nad gazem pracę W. Następnie tłok puszczono i zatrzymał się on w nowym położeniu równowagi. Jaka jest temperatura końcowa gazu? Ciśnienie zewnętrzne jest stałe.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2014

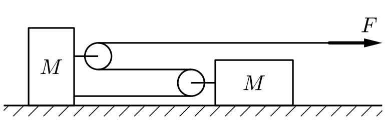
Przypominamy treść zadań:

586. K i K' to inercjalne układy odniesienia o zgodnych osiach, K' porusza się z prędkością V względem K wzdłuż osi x. Wzdłuż tej osi w układzie K' rozmieszczony jest ciąg jednakowych, równo odległych i zsynchronizowanych zegarów. Obserwator w K notuje równoczesne dla niego wskazania tych zegarów w dwóch chwilach: $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$ (rys. 2). Na podstawie tych pomiarów wyznaczyć V oraz odległość l' między sąsiednimi zegarami mierzoną w K'.



Rys. 2

587. W układzie przedstawionym na rysunku 3 bloki mają zaniedbywalnie małe masy, nić jest nieważka i nierozciągliwa, fragmenty nici, które nie leżą na blokach, są poziome. Masy klocków leżących na poziomej powierzchni są takie same i równe M. Do końca nici przyłożono poziomą siłę F. Z jakim przyspieszeniem porusza się ten koniec nici? Załóż brak tarcia i przyjmij, że klocki poruszają się ruchem postępowym.



Rys. 3

586. Zegary spoczywają w K', zatem $l = l'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, gdzie l jest odległością między sąsiednimi zegarami w układzie K. W czasie t_2 każdy z zegarów przebywa w tym układzie drogę $l = Vt_2$. Po upływie czasu t_2 wskazania tych samych zegarów w K' różnią się o 1s, stąd $1\mathrm{s} = t_2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$. W chwili $t_1 = 0$ współrzędna przestrzenna trzeciego zegara w układzie K wynosi $x_3 = l$ i zegar ten wskazuje czas $t_3' = -1\mathrm{s}$. Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$-1\mathrm{s} = \frac{-Vl}{\left(c^2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}.$$

Na podstawie wypisanych równań otrzymujemy: $V = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $l' = c\sqrt{2} \cdot 1\mathrm{s}$.

587. Naprężenie wzdłuż nici jest stałe, bo nić i bloczki są nieważkie, zatem przyspieszenia względem ziemi klocków lewego i prawego wynoszą odpowiednio: $a_L = \frac{3F}{M}$, $a_P = \frac{2F}{M}$. Oznaczmy przez a_1, a_2, a_3 wartości bezwzględne przyspieszeń względem ziemi poziomych odcinków nici, od najniższego do najwyższego. Mamy wtedy: $a_1 = a_L$, $a_2 = a_1 + 2a_P$, $a_3 = a_2 + 2a_L$. Przyspieszenie końca nici, do którego przyłożono siłę F, wynosi $a_3 = \frac{13F}{M}$.

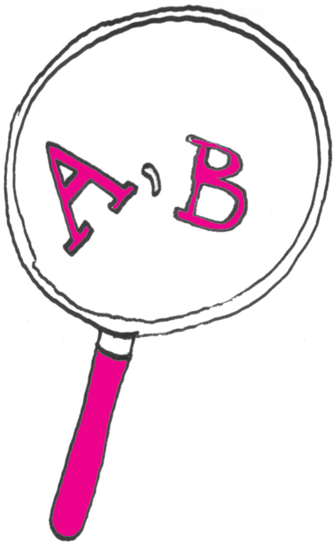
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 582 ($WT = 1{,}96$) i 583 ($WT = 2{,}32$) z numeru 9/2014

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,78
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,05
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Marian Łupieżowiec	Gliwice	22,43
Michał Koźlik	Gliwice	14,30
Krzysztof Magiera	Łosiów	12,44

Liczbę 44 punktów po raz dziesiąty przekroczył pan Tomasz Wietecha – gratulujemy!

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2015



Zadania z matematyki nr 697, 698

Redaguje Marcin E. KUCZMA

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bezkwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m. Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Zadanie 698 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2014

Przypominamy treść zadań:

689. Znaleźć wszystkie pary zbiorów A, B, zawartych w zbiorze liczb całkowitych, o następujących własnościach:

- każda liczba całkowita należy do co najmniej jednego ze zbiorów A, B;
- nie każda liczba całkowita należy jednocześnie do obu tych zbiorów;
- jeśli liczba x jest w zbiorze A, to liczba $x - 1$ jest w zbiorze B;
- jeśli liczby x, y są w zbiorze B, to liczba $x + y$ jest w zbiorze A.

690. Ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia warunki: $a_0 = 1$, $a_1 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Niech

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1} a_{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Udowodnić, że szereg $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ jest zbieżny, a jego suma jest liczbą wymierną.

689. Niech A, B będzie parą zbiorów, spełniających wymienione warunki. Ponumerujmy te warunki, w podanej kolejności, (i), (ii), (iii), (iv).

Gdyby liczba 0 była w zbiorze B, to dla każdej liczby $b \in B$ mielibyśmy (z war. (iv)) $b + 0 \in A$; to by znaczyło, że zbiór B zawiera się w zbiorze A, czyli (z war. (i)) $A = \mathbb{Z}$. Wtedy (z war. (iii)) także $B = \mathbb{Z}$, co daje sprzeczność z warunkiem (ii). Wniosek: $0 \notin B$. Warunek (i) wymusza konkluzję: $0 \in A \setminus B$. Stąd (i z war. (iii)) $-1 \in B$.

Gdyby liczba 1 była w zbiorze A, to (z war. (iii)) $0 \in B$; a przecież $0 \in A \setminus B$. Tak więc $1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $1 \in B \setminus A$.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 0$:

$$(*) \qquad 2k \in A \setminus B, \qquad 2k+1 \in B \setminus A.$$

Dla $k = 0$ tak jest. Ustalmy liczbę $k \geqslant 0$ i przyjmijmy słuszność związków $(*)$ dla tej liczby k. Przypuśćmy, że $2k + 2 \in B$; wtedy (z war. (iv)) $2k + 1 = (2k + 2) + (-1) \in A$, wbrew założeniu indukcyjnemu. Zatem $2k + 2 \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k + 2 \in A \setminus B$.

Przypuśćmy z kolei, że $2k + 3 \in A$. Wtedy (z war. (iii)) $2k + 2 \in B$, wbrew temu, co wykazaliśmy tuż przed chwilą. Zatem $2k + 3 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k + 3 \in B \setminus A$. Uzyskaliśmy związki $(*)$ z liczbą k zastąpioną przez $k + 1$. Z zasady indukcji własność $(*)$ przysługuje wszystkim liczbom całkowitym nieujemnym.

Teraz pokażemy, że ujemnym – też. Przypuśćmy, że $2k \in B$ dla pewnej liczby $k < 0$. Wiemy już (własność $(*)$), że $2|k| + 1 \in B$, a więc (z war. (iv)): $1 = (2|k| + 1) + 2k \in A$; sprzeczność z wcześniejszym ustaleniem ($1 \in B \setminus A$). W takim razie $2k \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k \in A \setminus B$.

Wreszcie przypuśćmy, że $2k + 1 \in A$ dla pewnej liczby $k < 0$; wtedy (z war. (iii)) $2k \in B$, wbrew temu, co stwierdziliśmy przed chwilą. Zatem $2k + 1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k + 1 \in B \setminus A$.

Mamy więc słuszność związków $(*)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$. Mówią one, że A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, a B jest zbiorem wszystkich liczb nieparzystych. Ta para zbiorów spełnia, rzecz jasna, wymagane warunki – i jest to jedyna taka para.

690. Oznaczmy $1/(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = c_n$. Liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są całkowite i większe od 1, czyli większe lub równe 2. Zatem $c_n \leqslant 2^{-n}$.

Z rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) wynika, że

$$(a_{n+1} - 1)c_n = \frac{1}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} = a_{n+1} b_n.$$

Stąd

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right) c_n = c_n - c_{n+1},$$

$S_n = b_1 + \ldots + b_n = (c_1 - c_2) + \ldots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}$. A skoro $c_{n+1} \leqslant 2^{-n-1}$, widzimy, że $S_n \to c_1 = 1/a_1$ przy $n \to \infty$. Jest to suma szeregu $\sum b_n$; i oczywiście jest to liczba wymierna.