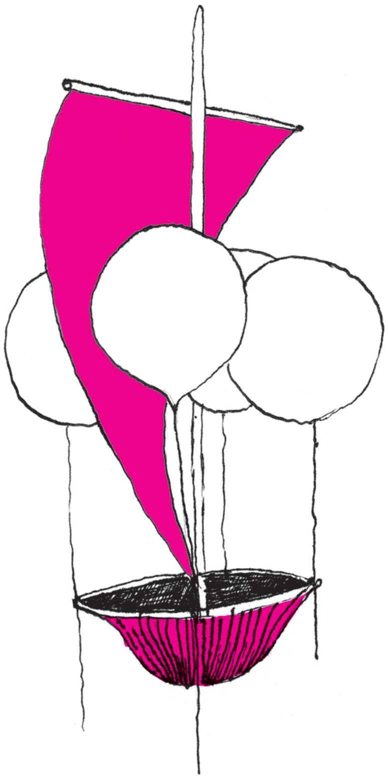
Traktat o lataniu na Niczym

Krzysztof REJMER

Balon, żeby unieść się w przestworza i pożeglować, musi być wypełniony gazem lżejszym od powietrza atmosferycznego. Wie to każdy. Ale czy na pewno jest to jedyna możliwość?



Uznawany za ojca powietrznej nawigacji, wykładowca matematyki oraz fizyki w Brescii, jezuita Francisco Lana de Terzi (1631–1687), widział to nieco inaczej. Lana nie chciał niczym balonu wypełniać. On go chciał opróżnić! Siłę nośną powietrznego statku Lany dać miały cztery miedziane kule, z których za pomocą pompy próżniowej Boyle'a usunięto powietrze. W przeciwieństwie do innych pionierów lotów balonem posługujących się metodą prób i błędów, Lana wspierał się obliczeniami; znał prawo Archimedesa oraz wiedział, że powietrze ma swój ciężar. Na ile jego obliczenia były poprawne, to rzecz inna, liczy się już sama próba dokonania matematycznej analizy warunków lotu. Znacznie gorzej poradził sobie z zarzutem, że kule po opróżnieniu zostaną zgniecione przez działające z zewnątrz potężne siły parcia atmosfery. Wiadomo: *horror vacui*! Lana z niezmąconym spokojem odpierał ten zarzut, posługując się scholastyczno-arystotelesowskim argumentem: kula, będąc kształtem doskonałym, zniesie wszystko. Na jego obronę rzec trzeba, że sensowna odpowiedź na to pytanie wymaga pewnej wiedzy materiałowej, w jego czasach jeszcze nieistniejącej.

Książka Lany, *Prodromo dell'Arte Maestra* (1670 r.) zdobyła znaczny rozgłos. W 1690 roku została przetłumaczona na angielski przez Roberta Hooke'a. Dwadzieścia lat później, w 1710 roku, Leibniz udowodnił, że pomysł Lany jest nierealistyczny. Autor tego artykułu wprawdzie nie zna argumentacji Leibniza, ale też wcale nie istnieje potrzeba, by dziś do niej sięgać.

Zacznijmy od przypomnienia, że – zgodnie z prawem Archimedesa – na ciało zanurzone w płynie (obojętne, czy jest to ciecz, czy gaz) znajdującym się w polu grawitacyjnym działa siła wyporu, o wartości równej ciężarowi wypartego przez to ciało płynu. Jest to konsekwencją liniowego spadku ciśnienia płynu wraz z wysokością. Dowód jest elementarny, choć, oczywiście, wymaga pewnych założeń; rzecz się nieco komplikuje, jeśli temperatura gazu (ciecze nie będą nas interesować) nie jest ustalona albo też wieje wiatr. W przypadku ogólnym siły działające na ciała ze strony płynu bywają skomplikowane. Dlatego przyjmiemy, że atmosfera jest izotermiczna i nieruchoma. Również nie będziemy tu mówić o montgolfierach, czyli o balonach wypełnionych gorącym powietrzem.

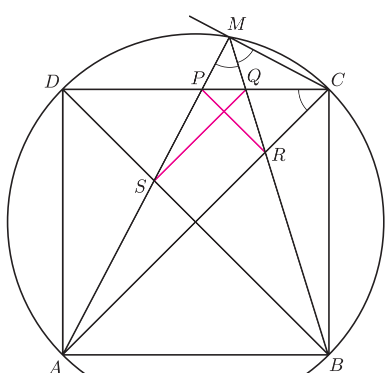
Przede wszystkim musimy wiedzieć, ile „ważą” różne gazy. W tak zwanych warunkach standardowych (temperatura 0°C i ciśnienie 1000 hPa czyli 0,986 atm) gęstość powietrza ma wartość 1,28 kg/m^3, czyli 1,28 g/l. Ta druga jednostka (g/l) wydaje się lepiej przemawiać do wyobraźni. Wynika stąd, że każdy „litr próżni” daje siłę wyporu o wartości 1,28 G. Moneta jednozłotowa ma masę 5 gramów, a zatem aby ją unieść w powietrze, potrzeba niemal czterech litrów próżni. W rzeczywistości więcej, bo próżnię trzeba w coś „opakować”. Jeśli wypełnimy balon gazem, będzie gorzej, bo gaz, w przeciwieństwie do próżni, ma masę. Oczywiście, najlepiej użyć możliwie lekkiego gazu, na przykład wodoru. Jego gęstość w warunkach normalnych to tylko 0,09 g/l. Tak więc od siły wyporu dla każdego litra objętości należy odjąć ciężar o wartości 0,09 G. To daje wyobrażenie, jak wielkie muszą być balony, żeby człowiek mógł nimi latać.

Niestety, wodór potrafi wybuchać, dlatego znacznie lepszy jest – w epoce pierwszych lotów balonem jeszcze nieznany – hel. Jego gęstość w warunkach standardowych ma wartość 0,178 g/l. Tak więc, jeśli użyjemy helu, siła wyporu zostaje zmniejszona o około 14 procent. Obecność gazu zmniejsza siłę wyporu o ciężar monety jednogroszowej (masa jednogroszówki to 1,64 g) dla 18 litrów wodoru i 9 litrów helu. Pamiętajmy też, że pole powierzchni balonu rośnie wraz z jego rozmiarami wolniej niż objętość, zatem siła wyporu rośnie szybciej niż jego ciężar (przy założeniu, że balon wykonany jest zawsze z tego samego materiału) dlatego im większy balon, tym większego balastu wymaga.

Rozwiązanie zadania M 1447.
Ponieważ kąty PMR i PCR są równe (jako kąty wpisane oparte na ćwiartce okręgu), to na czworokącie $PMCR$ można opisać okrąg. Zatem

$\sphericalangle PRM = \sphericalangle PCM = \sphericalangle DCM = \sphericalangle DBM.$

W takim razie odcinki PR i DB są równoległe.



Rozważając czworokąt $QMDS$, wykażemy analogicznie, że $QS \parallel AC$, a stąd łatwo wywnioskować tezę.

Warto może dodać, że oprócz montgolfiery oraz balonu wypełnionego wodorem, od nazwiska wynalazcy (Charlesa) nazywanego szarlierą, istniały również – raczej zapomniane już – napełniane gazem błotnym gryniery (pomysłu Greena) oraz roziery, hybrydy będące kombinacją montgolfiery i szarliery. Ich imię pochodzi od Pilâtre de Rozièra, jednego z pionierów lotnictwa balonowego, który zginął podczas próby pokonania Kanału La Manche, gdy iskra z paleniska montgolfiery spowodowała eksplozję wodoru.

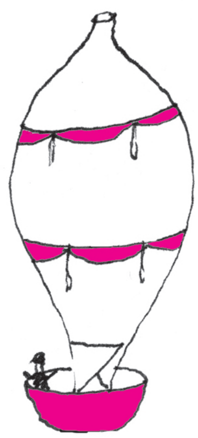
Widzimy, że w zasadzie Lana miał rację, bo balon próżniowy ma większą wyporność niż gazowy. Ale wyporność to przecież jeszcze nie wszystko. Zastanówmy się nad wytrzymałością próżniowego balonu. Taki balon musi być sztywny. Niech to będzie metalowa sfera. Podzielimy ją na dwie półsfery, dolną i górną. Skierowana pionowo siła parcia powietrza atmosferycznego, działająca na każdą z nich, jest równa

$$\frac{1}{2}Ap = \pi R^2 p,$$

gdzie p to ciśnienie atmosferyczne, A jest polem powierzchni półsfery, zaś R to jej promień. Tym razem, w przeciwieństwie do wyprowadzenia prawa Archimedesa, możemy pominąć różnice ciśnień. Czynnik $1/2$ bierze się z całkowania kosinusa kąta azymutalnego (interesuje nas pionowa składowa siły). Wynika stąd, że naprężenie σ, ściskające sferę na jej równiku, jest równe

$$\sigma = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R h} = \frac{Rp}{2h}.$$

Grubość sferycznej powłoki oznaczyliśmy przez h ($h \ll R$). Aby balon mógł swobodnie wisieć w powietrzu, siła wyporu musi zrównoważyć jego ciężar; tak więc, dla próżniowego balonu (w naszym oszacowaniu pomijamy ciężar gondoli, lotnika oraz ładunku) będzie



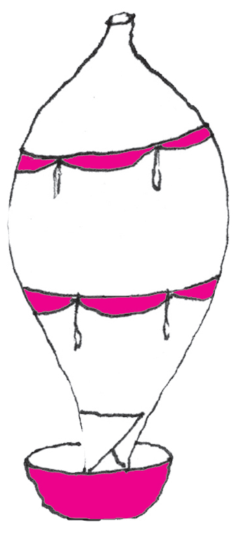
$$4\pi R^2 h \rho_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p,$$

gdzie ρ_s jest gęstością materiału, z którego wykonano sferę, natomiast ρ_p jest gęstością powietrza. Jak widać, grubość powłoki musi być proporcjonalna do jej promienia, przy czym stała proporcjonalności zależy od stosunku gęstości

$$\frac{h}{R} = \frac{\rho_p}{3\rho_s}.$$

Dla mniej cennego od miedzi aluminium ($\rho_p = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3) i standardowego powietrza otrzymujemy $h/R = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Dla sfery o promieniu 10 m stosowna grubość powłoki to nieco ponad półtora milimetra. Taka sfera wydaje się być czymś bardzo delikatnym, zderzenie z czymkolwiek: wieżą, drzewem, a kto wie, czy również nie ptakiem, mogłoby mieć dla niej poważne następstwa! Mogłaby zostać przedziurawiona lub ulec deformacji. O tym drugim jeszcze za chwilę.

Z powyższych równań wynika, że niezależnie od promienia i grubości powłoki opróżnionej z powietrza sfery jest

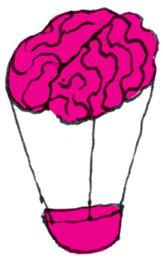


$$\sigma = \frac{3\rho_s}{2\rho_p}p.$$

Dla aluminium daje to wartość $\sigma = 3{,}3 \cdot 10^8$ Pa. Ten rząd wielkości zgadza się z danymi dotyczącymi wytrzymałości większości stopów aluminium. Otrzymaliśmy wynik zbyt bliski granicy bezpieczeństwa, a zatem negatywny.

Akhmeteli i Gavrilin przedyskutowali stabilność próżniowego balonu związaną ze zjawiskiem wyboczenia. Dla każdej konstrukcji jest ono niebezpieczne. Ta analiza jest bardziej skomplikowana. Na czym polega wyboczenie, opiszemy na najprostszym możliwym przykładzie: ściskania pręta. Jeśli ściskamy go wzdłuż jego długiej osi, to przy pewnej wartości ściskającej siły, tak zwanej wartości krytycznej, następuje zjawisko gwałtownego przejścia od deformacji ściskania do innego rodzaju deformacji – zginania. Dla sferycznej powłoki zjawisko wyboczenia jest oczywiście dużo bardziej skomplikowane, jednak analiza przeprowadzona przez wspominanych powyżej badaczy dowodzi, że żadna metalowa powłoka (a nawet i diamentowa, gdyby ktoś chciał i potrafił ją wykonać) nie ochroni próżniowego balonu przed wyboczeniem. Co prawda, można oczekiwać, że jakaś powłoka mająca skomplikowaną wewnętrzną strukturę będzie dostatecznie lekka, wytrzymała i sztywna. A zatem, kto wie? Ale póki co, to tylko fantastyka.

Sam Lana pesymistycznie uważał, że jakikolwiek balon jest jedynie igraszką umysłu i zbudowanie go nie jest możliwe, ponieważ: [...] *pewnym jest, iż Bóg nie zezwoli, by taka maszyna się udała, ponieważ może ona sprawić wiele kłopotu sprawującym rządy. Czyż znajdzie się człowiek, który może zapewnić, że żadne miasto nie zostanie narażone na niespodziankę, gdy powietrzny statek zacznie manewrować nad jego domami i placami? Twierdze i miasta mogłyby zostać bezsprzecznie zniszczone, gdyby masy żelaza, kule ognia i bomby zostały zrzucone z wysoka* [...]

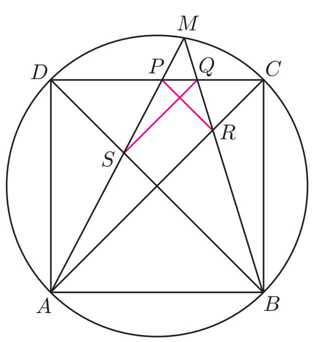


Bardziej optymistycznie widział to ksiądz Józef Herman Osiński (1738–1802), warszawski uczony, mający pewne osiągnięcia w dziedzinie badań nad elektrycznością. W książce *Robota machiny powietrznej Pana Montgolfier* (1784) przedstawił własny projekt balonu transportowego, jaki, jego zdaniem, unosząc się na niewielkiej wysokości ponad powierzchnią Ziemi, ciągnięty przez parę koni, dwadzieścia razy rocznie przemieszczałby się między Warszawą i Krakowem przenosząc ładunek 640 kg, co przyniosłoby zysk w wysokości 24 000 złotych. Rozważał również budowę balonów według pomysłu Lany (najwyraźniej nic nie wiedział o obiekcjach Leibniza, a może zwyczajnie nic sobie z nich nie robił): [...] *szkłą na kule latające nie można używać, bo zepsuciu zbyt podległe* [...] *Można zaś z metalu, a w szczególności z żelaza pomienione kule robić, a urobiwszy, powietrze z nich wyciągnąć, czyli czcze uczynić, zaczem na powietrze wzniosą się.*

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1447. Punkt M leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Prosta AM przecina BD, CD odpowiednio w punktach S, P, zaś prosta BM przecina AC, CD odpowiednio w punktach R, Q (rys. 1). Udowodnić, że odcinki SQ i PR są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

M 1448. Udowodnić, że dla nieujemnych liczb x, y, z prawdziwa jest nierówność

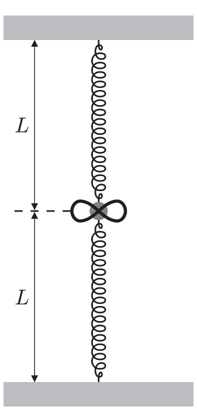
$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \leqslant \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$$

Rozwiązanie na str. 15

M 1449. Rozpatrzmy następującą grę. Przed rozpoczęciem gry dane są dwa niepuste stosy z m i n monetami. Ruch polega na usunięciu jednego ze stosów i podzieleniu drugiego na dwa *niepuste*. Gracze wykonują ruchy na przemian. Jeśli któryś *nie* może wykonać ruchu, to przegrywa. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą, gdy $m = n = 2015$.
Rozwiązanie na str. 3

Przygotował Michał NAWROCKI

F 873. Małą kulkę zawieszono na dwóch jednakowych sprężynach, rozciągniętych do długości L każda. Po wytrąceniu z równowagi kulka porusza się periodycznie po trajektorii w kształcie ósemki (rys. 2). Jaka musi być długość nierozciągniętych sprężyn L_0, aby kulka poruszała się w taki sposób (ciężar sprężyn pominąć)?
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

F 874. Gdy światło pada na płaską płytkę szklaną prostopadle do jej powierzchni, to 8% energii fali odbija się, a 92% przechodzi przez płytkę. Innymi słowy, współczynnik odbicia wynosi $R = 0{,}08$, a współczynnik transmisji wynosi $T = 0{,}92$ (uwzględniono już tutaj odbicie od obu powierzchni płytki). Jaki będzie współczynnik transmisji stosu złożonego z n płytek?
Rozwiązanie na str. 1