

## Skąd wiadomo, że moneta ma i orła, i reszkę?

W *Delcie* 1/2015 Łukasz Rajkowski oszacował, kiedy należy spodziewać się końca świata. Narzędziem użytym w tej analizie było wnioskowanie bayesowskie. Nie od dziś wiadomo, że należy je stosować z odpowiednią ostrożnością oraz dbałością o założenia i interpretacje. Dlaczego? Zastanówmy się nad poniższym prostym przykładem, gdzie na użytek tych, którzy nie wyobrażają sobie prawdopodobieństwa bez kul w urnach lub rzutów monetą, został wykorzystany ten ostatni model.

Rozważania te inspirowane są znanym w statystyce paradoksem Jeffreysa–Lindleya. Za cenę technicznej komplikacji przedstawiane tu dylematy można jeszcze bardziej wystrzyć.

W cyrkach, do których nie dotarła jeszcze zasada równouprawnienia płci, sztuczki magiczne przedstawiane są przez magika wspieranego przez asystentkę. Wyobraźmy sobie sztuczkę, podczas której asystentka zamykana jest w solidnej skrzyni wraz z symetryczną monetą, którą wykonuje  $m$  rzutów, odczytując na głos wyniki. Niestety, od czasu do czasu asystentkę nachodzi przemożna chęć zełgania wyniku: z prawdopodobieństwem  $p_b$  udzieli ona zatem odpowiedzi  $R$ , gdy wypadnie orzeł, a odpowiedzi  $O$  po uzyskaniu reszki.

Przedstawiona sytuacja może wydawać się, jak to w cyrku, nieco sztuczna, ale cyrk ten to w zasadzie codzienność dowolnego badacza wykonującego i interpretującego doświadczenia. Opisany model jest przecież bardzo podobny choćby do dylematów fizyka cząstek elementarnych, który musi wybrać między hipotezą nieistnienia nowej cząstki oraz istnienia nowej cząstki o nieznannej masie (analogia staje się szczególnie wyraźna, gdy ciągi orłów i reszek utożsamimy z zapisanymi w systemie dwójkowym możliwymi masami owej cząstki).

Wyniki podane magikowi przez asystentkę tworzą następujący ciąg danych

$$D = \underbrace{ORRR \dots R}_{m-1}.$$

Zadanie magika polega na rozstrzygnięciu, która z poniższych hipotez jest *poprawna*, tzn. lepiej opisuje rzeczywistość.

$H_0$  : Moneta ma dwie reszki. (Moneta bez orła?! Prezes NBP przed Trybunał Stanu!)

$H_A$  : Moneta jest zwykłą symetryczną monetą z orłem i reszką.

Korzystając z twierdzenia Bayesa, magik może obliczyć prawdopodobieństwo tego, że prawdziwa jest hipoteza  $H_0$  pod warunkiem uzyskania danych  $D$ :

$$\mathbb{P}(H_0|D) = \frac{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(D|H_0)}{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(D|H_0) + \mathbb{P}(H_A)\mathbb{P}(D|H_A)}.$$

Prawdopodobieństwem warunkowym  $\mathbb{P}(A|B)$  zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywamy liczbę

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prawdopodobieństwa  $\mathbb{P}(H_0)$  i  $\mathbb{P}(H_A)$  muszą zostać przyjęte niejako „z góry” i „na wiarę” – wyrażają one *poglądy* magika na temat modelowanego zjawiska. Jasne jest, że  $\mathbb{P}(D|H_0) = p_b(1 - p_b)^{m-1}$  (jeżeli asystentka rzuca monetą dwureszkową, to wynik pierwszego rzutu musiał być zmyślny, a pozostałe – nie) oraz  $\mathbb{P}(D|H_A) = 1/2^m$  (jeżeli orły i reszki pojawiają się losowo, to ciąg  $D$  jest jednym z  $2^m$  możliwych wyników i losowe kłamstwo asystentki tego nie zmienia). Zachodzi zatem równość:

$$\mathbb{P}(H_0|D) = \frac{\mathbb{P}(H_0)p_b(1 - p_b)^{m-1}}{\mathbb{P}(H_0)p_b(1 - p_b)^{m-1} + \mathbb{P}(H_A) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m}.$$

Ścisłe rzecz biorąc, wnioskowanie statystyczne wykazuje powinowactwo z manią ogarniającą niektórych śledczych: nie ma hipotez, które należy przyjąć za prawdopodobne (a więc opisujące rzeczywistość), są tylko takie, których nie można odrzucić.

Niezależnie od poglądów na temat wartości  $\mathbb{P}(H_0)$  i  $\mathbb{P}(H_A)$ , przy  $p_b < \frac{1}{2}$  prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}(H_0|D)$  może być dowolnie bliskie jedności (a prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}(H_A|D)$  dowolnie bliskie zera) pod warunkiem, że  $m$  jest dostatecznie duże. Oznacza to, że uzyskanie przez asystentkę odpowiednio długiego ciągu reszek będzie argumentem na rzecz odrzucenia przez magika hipotezy  $H_A$  i *uznania* hipotezy  $H_0$  za prawdopodobną.

Nietrudno sprawdzić, że dla  $\mathbb{P}(H_0) = \mathbb{P}(H_A) = \frac{1}{2}$  magik odrzuca hipotezę  $H_A$  na tym samym *poziomie istotności*, na jakim widz odrzuca hipotezę  $H_0$ , o ile  $p_b \approx \frac{1}{\sqrt{m} 2^{m/2}}$ .

Intuicyjnie oczywiste? Jednak z jednej z łóż słyhać gwizdy! Siedzący tam widz postanowił spojrzeć na cyrkową sztuczkę od bardziej klasycznej strony. Można przecież sprawdzić, czy hipoteza  $H_0$  jest po prostu zgodna z danymi  $D$ . Gdyby hipoteza  $H_0$  była prawdziwa, prawdopodobieństwo uzyskania wyniku innego niż ciąg samych reszek równałoby się  $1 - (1 - p_b)^m$ . Jeżeli  $p_b$  jest odpowiednio małą liczbą, prawdopodobieństwo to także jest małe, więc widz mógłby żądać *odrzuć* hipotezy  $H_0$ .

To właściwie dlaczego odrzuciłeś hipotezę, że moneta ma i orła, i reszkę, magiku?

Krzysztof TURZYŃSKI