Proste zadanie o wielomianach

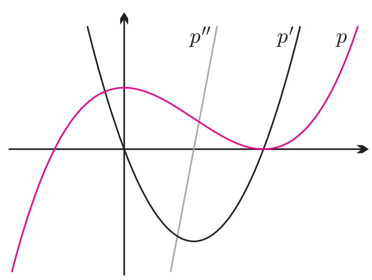
Weźmy wielomian $p(x) = a(x+b)^n$ i obliczmy wszystkie jego niezerowe pochodne:

$$\begin{aligned} p'(x) &= na \cdot (x+b)^{n-1}, \\ p''(x) &= n(n-1)a \cdot (x+b)^{n-2}, \\ &\dots \\ p^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!} a \cdot (x+b)^{n-k}, \\ &\dots \\ p^{(n-1)}(x) &= \frac{n!}{1!} a \cdot (x+b), \\ p^{(n)}(x) &= n!a. \end{aligned}$$

Widzimy, że $p(x)$ ma wspólny pierwiastek z każdą ze swoich pochodnych $p'(x), p''(x), \dots, p^{(n-1)}(x)$. Czy są inne wielomiany o tej własności?

Zadanie. Niech $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$. Przypuśćmy, że dla każdego $k = 1, \dots, n-1$ wielomiany $p(x)$ i $p^{(k)}(x)$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty. Udowodnij, że $p(x) = a(x+b)^n$.

Wielomiany $p(x)$ i $p'(x)$ mają wspólny pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x)$ ma przynajmniej jeden pierwiastek wielokrotny. Tym samym rozwiązaliśmy zadanie dla $n = 2$, bo wielomian stopnia 2, mający pierwiastek wielokrotny, jest postaci $a(x+b)^2$. Dla $n = 3$ musimy jeszcze rozważyć wielomiany postaci $p(x) = a(x+b)^2(x+c)$, gdzie $b \neq c$, jednak taki wielomian nie może mieć wspólnego pierwiastka ze swoją drugą pochodną $p''(x)$, o czym przekonuje nas rzut oka na rysunek. Zatem także dla $n = 3$ zadanie jest rozwiązane.



Podobny argument – prosta analiza wzajemnego położenia pierwiastków wielomianu i jego pochodnych na podstawie twierdzenia Rolle'a – działa jeszcze dla $n = 4$.

Spróbujmy inaczej. Dla dowolnych dwóch wielomianów $p(x)$ i $q(x)$ zdanie „$p(x)$ i $q(x)$ mają wspólny czynnik" można zapisać jako równanie algebraiczne zawierające współczynniki tych wielomianów. Czytelnikom zainteresowanym szczegółami polecamy zapoznanie się z pojęciem *rugownika* (ang. *resultant*) dwóch wielomianów. Wobec tego warunek z treści zadania prowadzi do układu $n-1$ równań algebraicznych w zmiennych $a_n, \dots, a_0$. Na przykład dla $n = 2$ dostajemy znaną wszystkim „deltę":

$$a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0,$$

a dla $n = 3$ mamy warunki:

$$\begin{aligned} -a_2^2 a_1^2 + 4a_3 a_1^3 + 4a_2^3 a_0 - 18a_3 a_2 a_1 a_0 + 27a_3^2 a_0^2 &= 0, \\ -2a_2^3 + 9a_3 a_2 a_1 - 27a_3^2 a_0 &= 0 \end{aligned}$$

i tak dalej. Pozostaje wykazać, że jedyne rozwiązania tak otrzymanego układu odpowiadają współczynnikom wielomianów postaci $a(x+b)^n$. Jak dotychczas, możliwości obliczeniowe znanych algorytmów rozwiązywania układów równań algebraicznych kończą się na $n = 12$, i w tym zakresie nasze zadanie można uznać za rozwiązane (zob. [CLO14]).

Jak ważne jest założenie, że $p(x)$ ma wspólny pierwiastek ze *wszystkimi* swoimi pochodnymi do rzędu $n-1$ włącznie? Spójrzmy na przykład:

$$\begin{aligned} p(x) &= x(x^2-1)(x^2-9) = x^5 - 10x^3 + 9x, \\ p'(x) &= 5x^4 - 30x^2 + 9, \\ p''(x) &= 20x^3 - 60x = 20x(x^2-3), \\ p'''(x) &= 60x^2 - 60 = 60(x^2-1), \\ p''''(x) &= 120x. \end{aligned}$$

Wielomian $p(x)$ ma wspólny pierwiastek z każdą wymienioną pochodną z wyjątkiem pierwszej. Okazuje się, co więcej, że dla każdej takiej pary k, n, że $1 \leqslant k \leqslant n-1$, można skonstruować wielomian stopnia n, mający wspólny pierwiastek z każdą ze swoich pochodnych z wyjątkiem k-tej, i który nie jest postaci $a(x+b)^n$. Czytelnik może się o tym przekonać, eksperymentując z jednym z wielu programów (np. [Dra] lub [Tor]) pozwalających wizualizować wzajemne położenie pierwiastków wielomianu i pierwiastków jego pochodnych. Ambitniejszy Czytelnik, wykorzystując twierdzenie Brouwera o punkcie stałym, może spróbować samodzielnie udowodnić nawet silniejsze twierdzenie: dla każdego wyboru $n-2$ par liczb naturalnych (k_i, m_i), spełniających $1 \leqslant k_i \leqslant n-1$ oraz $1 \leqslant m_i \leqslant n-k_i$ dla $i = 1, \dots, n-2$, istnieje taki wielomian f stopnia n, że m_i-ty co do wielkości pierwiastek k_i-tej pochodnej f jest również pierwiastkiem f oraz f nie jest postaci $a(x+b)^n$.

Czytelnik już na pewno podejrzewa, że nasze zadanie jest trudniejsze niż typowe zadanie olimpijskie, nawet jeżeli na takie wygląda. Faktycznie, jest ono znane jako *hipoteza Casas-Alvero* od nazwiska matematyka, który postawił ją na początku obecnego wieku w związku ze swoją pracą nad krzywymi algebraicznymi. Dokładniej rzecz biorąc, hipoteza Casas-Alvero mówi o wielomianach o współczynnikach zespolonych, mających wspólne pierwiastki zespolone ze swoimi pochodnymi. Nasze sformułowanie, potencjalnie łatwiejsze, jest jednak także problemem otwartym. Przez ponad dekadę nastąpił tylko nieznaczny postęp w pracach nad hipotezą, lecz Czytelnik nie powinien się tym zrażać – najprawdopodobniej niewielu matematyków nią się interesuje. Używając silnych narzędzi algebraicznych, udowodniono, na przykład, [GvBLSvdW07], że hipoteza jest prawdziwa dla wielomianów stopnia $n = p^k$ lub $n = 2p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą i w kilku innych szczególnych przypadkach. Po bieżące wyniki odsyłamy do publikacji dostępnych w Internecie.

Michał ADAMASZEK, Sławomir KOLASIŃSKI

Literatura

[CLO14] W. Castryck, R. Laterveer, and M. Ounaïes, *Constraints on counterexamples to the Casas-Alvero conjecture and a verification in degree* 12, Math. Comp. 83 (2014), no. 290, 3017–3037.

[Dra] J. Draisma, *Casas-Alvero conjecture Java applet*, http://www.win.tue.nl/~jdraisma/index.php?location=recreational.

[GvBLSvdW07] H.-Ch. Graf von Bothmer, O. Labs, J. Schicho, and Ch. van de Woestijne, *The Casas-Alvero conjecture for infinitely many degrees*, J. Algebra 316 (2007), no. 1, 224–230.

[Tor] B. Torrence, *Wolfram Demonstration Project. Lucas–Gauss Theorem*, http://demonstrations.wolfram.com/LucasGaussTheorem/.