

Oszacujmy pole

Joanna JASZUŃSKA

Korzystając z tytułowego pomysłu oraz z rysunku 1 lub drobnych jego modyfikacji, można udowodnić szereg twierdzeń z różnych działów matematyki.

Zauważmy, że pole całego kwadratu jest nie mniejsze od sumy pól czterech zawartych w nim białych prostokątów. Stąd $(a+b)^2 \geq 4ab$, uzyskujemy więc $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, czyli *nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną*.

Dla $b = \frac{1}{a}$, każdy z prostokątów ma pole równe 1, zatem $(a + \frac{1}{a})^2 \geq 4$. Stąd *liczba dodatnia i jej odwrotność zawsze dają w sumie co najmniej 2*.

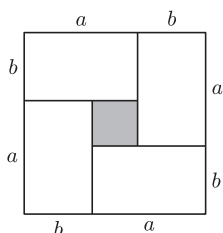
Zamiast kwadratu o boku $a+b$, rozważmy kwadrat o boku $\frac{a\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{b\sqrt{ab}}{a+b} = \sqrt{ab}$, przedstawiony na rysunku 2. Analogiczna jak dotychczas analiza pól pozwala udowodnić *nierówność pomiędzy średnią geometryczną a harmoniczną*:

$$\sqrt{ab}^2 \geq 4 \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{b\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}, \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

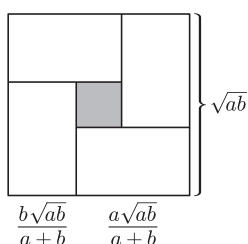
Ciąg Fibonacciego definiujemy tak: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Rozumowanie podobne do powyższych pozwala dowieść następującej tożsamości:

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \quad \text{dla } n \geq 3.$$

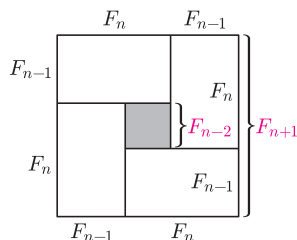
Rozważmy w tym celu kwadrat o boku $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ (rys. 3). Zauważmy, że mały szary kwadracik pośrodku ma wówczas bok długości $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Wobec tego powyższa tożsamość opisuje pole całego dużego kwadratu.



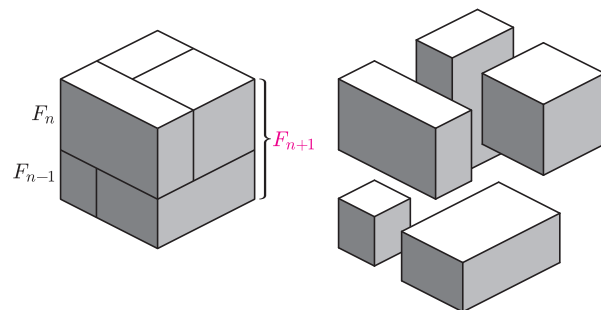
Rys. 1. $a, b > 0$.



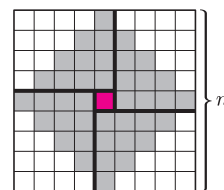
Rys. 2. $a, b > 0$.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Podobnie, analiza objętości sześcianu o krawędzi $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ podzielonego na kilka części tak, jak na rysunku 4, pozwala dowieść tożsamości

$$F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

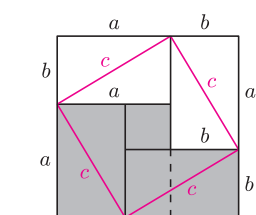
Z rysunku 5 można dla odmiany odczytać, że *dla nieparzystych liczb naturalnych n, liczba n² daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1*.

Oznaczmy przekątne prostokątów z rysunku 1 przez c (rys. 6). Usuwaając cztery „zewnątrzne” trójkąty, otrzymujemy kolorowy kwadrat o boku c . Z kolei usuwając cztery „górne” trójkąty, uzyskujemy szarą figurę złożoną z kwadratów o bokach a i b . Równość pól prowadzi do *twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$* .

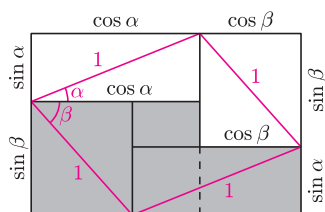
Ponadto, co najmniej połowa kwadratu jest szara, czyli $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$. Stąd *nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$* .

Przekątne prostokątów z rysunku 7 mają długości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ oraz $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Dwukrotnie usuwając po cztery trójkąty prostokątne, podobnie jak powyżej, uzyskujemy z jednej strony kolorowy romb o boku 1 i kącie $\alpha + \beta$, z drugiej zaś strony szarą figurę złożoną z dwóch prostokątów. Stąd równość pól: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Warto poszukać na rysunku 1 dowodów innych ciekawych faktów oraz odpowiedzi na pytanie, kiedy w opisanych powyżej nierównościach zachodzą równości.



Rys. 6. $a, b > 0$.



Rys. 7. $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$.

Część przykładów pochodzi z wielu książek C. Alsiny i R. Nelsena.