



# mała delta

## O tym, jak Puchatek podzbiory permutował

Niektórzy znajdują co rano na progu swojego domu butelkę ze świeżym mlekiem. Kubuś Puchatek każdego ranka znajduje tam  $n$  garnczków miodu. Garnczki są różnej wielkości i Kubuś każdego dnia stara się opróżniać je w innej kolejności. Oczywiście, nawet Kubuś wie (po tym, jak mu to wytłumaczył Krzyś), że jest  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  sposobów, na jakie to może zrobić (na  $n$  sposobów może wybrać pierwszy garnczek, na  $n - 1$  sposobów drugi itd.). Dziś jednak Kubuś jest w nastroju do niebezpiecznych rozmyślań i zastanawia się, co się stanie, jeśli dopuści możliwość, że może nie opróżnić wszystkich garnczków. „Oczywiście, jest to zupełnie bezsensowne z punktu widzenia misiowego żołądka – pomyślał Kubuś. – Ale ciekawe, jak bardzo zwiększy to liczbę sposobów dokonania wyboru.”

Zsumujmy liczbę uporządkowań poszczególnych podzbiorów  $n$ -elementowego zbioru garnczków – oznaczmy tę liczbę przez  $s(n)$  i spróbujmy ją obliczyć dla małych przykładów. Dla  $n = 1$  mamy dwie możliwości: Kubuś albo opróżni jedyny garnczek, jaki ma, albo nie zrobi tego, zatem  $s(1) = 2$ . Dla  $n = 2$  mamy już pięć sposobów postępowania: Kubuś nie robi nic, opróżnia jeden z dwóch garnczków, albo opróżnia oba garnczki w jednej z dwóch kolejności. Natomiast dla trzech garnczków mamy  $s(3) = 16$  sposobów (nic, 1, 2, 3, 12, 13, 21, 23, 31, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321). Wyniki dalszych eksperymentów udokumentowane są w tabelce na marginesie.

$n$	$n!$	$s(n)$
1	1	2
2	2	5
3	6	16
4	24	65
5	120	326
6	720	1957

Liczba uporządkowań  $n$  garnczków oraz liczba uporządkowań dowolnych podzbiorów  $n$  garnczków.

Z tabelki wynika, że dla małych przykładów  $s(n) < 3 \cdot n!$ , czyli rozważanie uporządkowań podzbiorów zwiększa liczbę sposobów co najwyżej 3 razy. Okazuje się, że tak jest również dla większych  $n$ . Kubuś chętnie podzieliłby się tym odkryciem z Krzysiem, ale do tego potrzebuje je udowodnić. Pomóżmy mu.

Jeśli Kubuś chce danego dnia opróżnić  $k$  garnczków, to pierwszy garnczek może wybrać na  $n$  sposobów, drugi na  $n - 1$  sposobów, aż do ostatniego, który może wybrać na  $n + 1 - k$  sposobów. To sumarycznie daje nam  $n!/(n - k)!$  możliwości. Sumując po wszystkich możliwych wyborach  $k$ , dostajemy

$$s(n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n - k)!} = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Gdybyśmy poprosili o pomoc uczoną Sowę, na pewno podpowiedziałałaby nam, że wartość sumy z prawej strony jest rzeczywiście ograniczona przez 3, a dokładniej jest nie większa niż

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \approx 2,7182818.$$

Z tego wynika, że wartość  $s(n)$  może być przybliżona przez  $n! \cdot e$ . Pójdźmy krok dalej i obliczmy, jak dobre jest to przybliżenie. Zauważmy, że dla  $n \geq 1$  mamy

$$\begin{aligned} n! \cdot e - s(n) &= n! \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < \\ &< \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e - 2 < 1. \end{aligned}$$

Skoro zatem  $n! \cdot e$  jest większe od całkowitej liczby  $s(n)$ , ale nie więcej niż o 1, to części całkowite tych dwóch liczb muszą być takie same. Dzięki temu w nagrodę za naszą wytrwałość dostajemy związany wzór na poszukiwaną liczbę uporządkowań podzbiorów  $n$  garnczków:

$$s(n) = \lfloor n! \cdot e \rfloor.$$

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK

