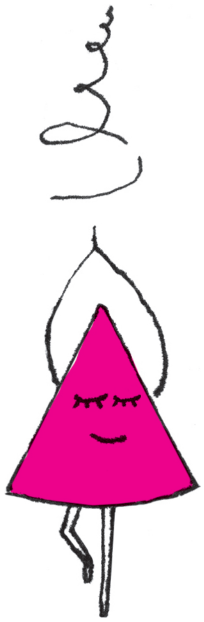
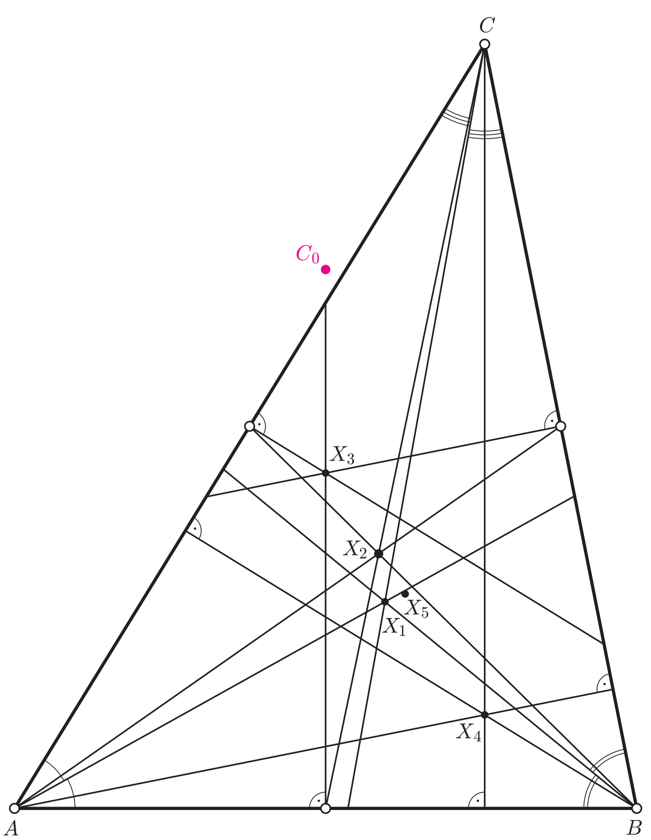
O obrotach centrów trójkąta

Zająłem się ciekawym problemem dotyczącym centrów trójkąta. Ciekawym, bo łatwym do wyobrażenia, a w pewnych aspektach nawet bardzo trudnym.



Najpierw wyjaśnienie, dlaczego napisałem „centrów", a nie zwyczajnie „środków" – chodzi tu o wspólną nazwę dla wszelkiego rodzaju wyróżnionych punktów związanych z trójkątem. Właściwie każdy punkt można jakoś wyróżnić – np. Clark Kimberling wyróżnił i opisał ich kilka tysięcy w swojej *Encyclopedia of Triangle Centers*. Tutaj „z imienia i nazwiska" będą przywołane: środek okręgu wpisanego jako X_1, środek ciężkości jako X_2, środek okręgu opisanego jako X_3, ortocentrum jako X_4, środek okręgu Feuerbacha (czyli dziewięciu punktów) jako X_5.

Na początek rozważmy wszystkie trójkąty równoramienne o wspólnej podstawie AB z wierzchołkiem C w danej półpłaszczyźnie ograniczonej prostą AB. Dla ustalenia uwagi wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych, w którym $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, t)$, $t > 0$. Interpretując t jako czas, możemy powiedzieć, że wierzchołek C porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 1 w górę, po symetralnej odcinka AB. Po tej samej prostej poruszają się wymienione centra trójkąta ABC. Skupimy się na razie na X_2 i X_3. Póki $t < \sqrt{3}$, centrum X_3 jest pod X_2. W chwili $t = \sqrt{3}$, gdy trójkąt ABC staje się równoboczny, centrum X_3 dogania X_2. Dla $t > \sqrt{3}$ centrum X_3 wychodzi na prowadzenie i potem już cały czas jest ponad X_2. Nic dziwnego: w pogoni za X_2 centrum X_3 rozwinęło większą prędkość, więc po nieuchronnym zrównaniu musiało je wyprzedzić. Centra X_1 i X_5 w chwili zrównania mają te same prędkości i nie następuje zmiana lidera.



Centra $X_1, \ldots, X_5$ w trójkącie różnobocznym.

Zrezygnujmy teraz z założenia, że trójkąt ABC jest równoramienny, a niech trójkąt ABC_0 będzie równoboczny. Rozważmy problem: ile okrążeń wokół X_i dokona centrum X_j, gdy wierzchołek C jednokrotnie okrąży punkt C_0 zgodnie z ruchem wskazówek zegara (wierzchołki A i B tkwią tam, gdzie poprzednio)? Z rozważań topologicznych (których nie będę tu przytaczał) wynika, że jeśli centra X_i i X_j pokrywają się wyłącznie w trójkącie równobocznym, to odpowiedź na to pytanie nie zależy od konkretnego kształtu krzywej, po której wierzchołek C obiega punkt C_0 – możemy więc przyjąć, że krzywa ta jest okręgiem. Na małym okręgu wokół punktu C_0 położonych jest dokładnie 6 punktów, z których każdy tworzy wraz z punktami A i B pewien trójkąt równoramienny. Dla tych sześciu punktów znamy kierunek wektora $\overrightarrow{X_iX_j}$. Nietrudno zgadnąć na tej podstawie, że X_3 obiegnie jednokrotnie X_2 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, natomiast X_5 dwukrotnie okrąży X_1 zgodnie z ruchem wskazówek.

Wydaje się, że trzy obroty wektora $\overrightarrow{X_iX_j}$ wokół X_i są wykluczone. Okazuje się jednak, że możliwe są cztery. W tym celu wskazałem odpowiednie dwa centra (inne od wymienionych – każdy może przecież zdefiniować swoje własne centra, nie ograniczając się nawet do encyklopedii Kimberlinga). Jak to zrobiłem, możesz dowiedzieć się na stronie `www.deltami.edu.pl`, ale może najpierw sam spróbujesz?

Dariusz MIKLASZEWSKI